

UNIVERSITE DE NANCY I

* * *

Numéro d'Enregistrement au C. N. R. S. : AO7996

* * *

THESE

présentée à l'Université de Nancy I

pour obtenir le grade de

Docteur-Ingénieur

par

GILLES RODDE

Ingénieur I. S. I. N.

* * *

METHODE D'IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES

ET DE GENERATION DE COURBES PAR EQUATIONS DE

RECURRENCE .

* * *

soutenue le

19 JAN. 1973

, devant la Commission d'Examen :

Messieurs

R. MAINARD

Président.

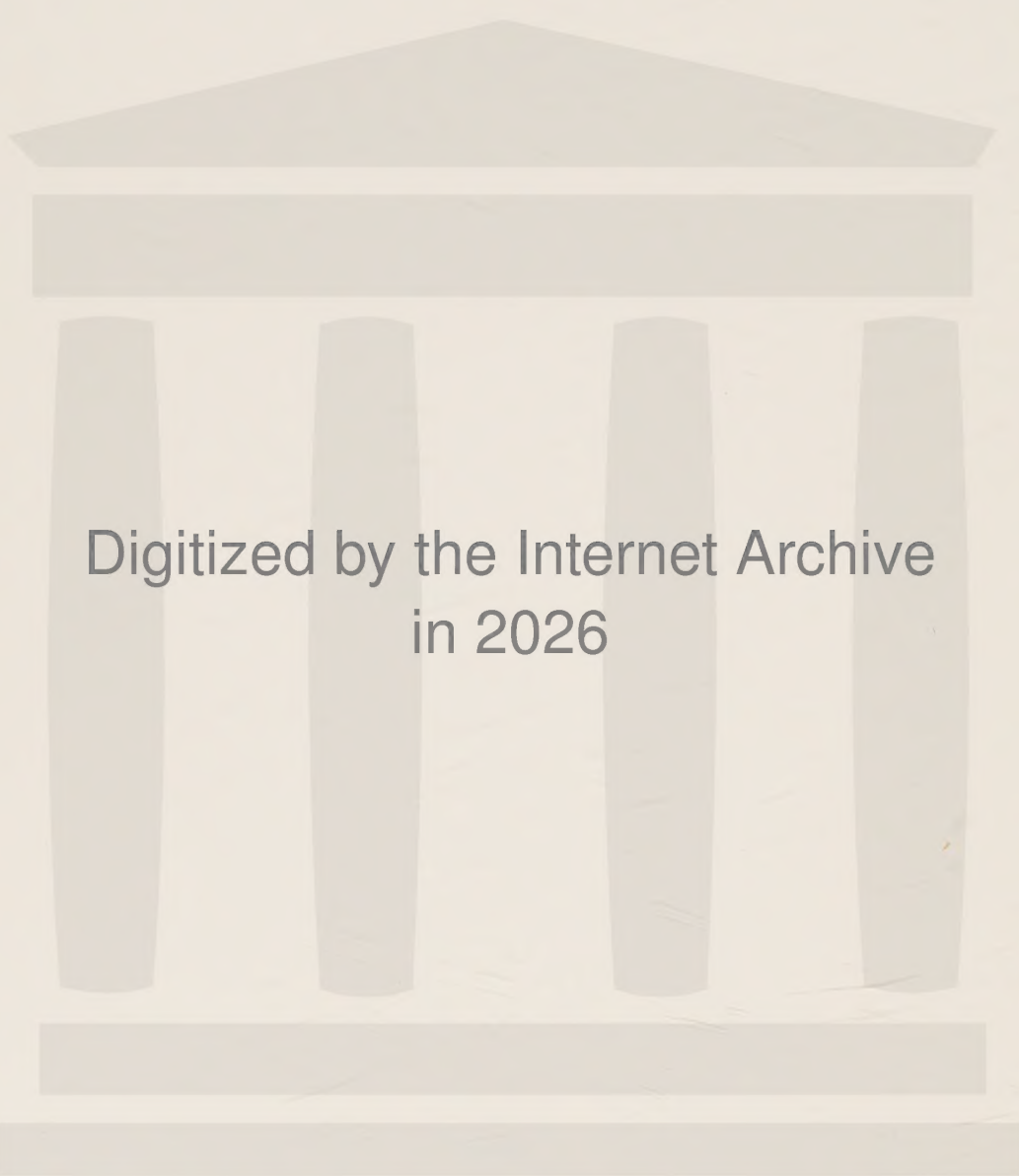
R. HUSSON

Examineur.

A. FRÜHLING

Rapporteur

* * *



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555024_0017

* A VANT-PROPOS *

Ce travail a été réalisé dans le cadre de l'enseignement de l'Automatique
et de l'identification des systèmes aux élèves de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

*
* METHODE D'IDENTIFICATION *
*
* DES SYSTEMES LINEAIRES *
*
* ET DE GENERATION DE COURBES *
*
* PAR EQUATIONS DE RECURRENCE *
*

Le présent travail a été réalisé dans le cadre de l'enseignement de l'Automatique
et de l'identification des systèmes aux élèves de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.



L'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE) est une école d'ingénieurs spécialisée dans la formation des futurs cadres de l'industrie aéronautique et spatiale. Elle est membre de l'Association des Écoles Nationales Supérieures d'Ingénieurs (AENSI) et de l'Association des Écoles Nationales Supérieures de l'Aéronautique et de l'Espace (AENAE). L'ENSAE est reconnue par le Ministère de l'Éducation Nationale et de l'Enseignement Supérieur.

* AVANT-PROPOS *

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Laboratoire d'Electricité et d'Automatique de la Faculté des Sciences de Nancy.

Monsieur le Professeur R. MAINARD, Directeur Général de l'Institut Universitaire de Technologie, a accepté d'assurer la présidence du Jury. Je le remercie de l'honneur qu'il me fait.

Je remercie Monsieur le Professeur R. HUSSON de la confiance dont il fait preuve à mon égard en acceptant de siéger parmi le Jury.

Je remercie Monsieur le Professeur A. FRÜHLING pour la bienveillance qu'il a toujours témoignée envers moi depuis le jour où il m'a accueilli au Laboratoire d'Electricité et d'Automatique.

J'adresse mes remerciements à tous mes camarades du Laboratoire, pour l'ambiance amicale qu'ils y font régner. Je prie en particulier mes camarades du Groupe Commande Numérique, animée par M. VERON, de trouver ici l'expression de ma gratitude pour leur collaboration sympathique et constructive. Je remercie également Mademoiselle Jocelyne BOGUET, Secrétaire du Laboratoire, qui s'est acquittée avec amabilité et diligence de la tâche que constitue la présentation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

Chapitre I : Intégration d'une équation différentielle par la transformation en z .

- Rappel de la méthode
- Relation de récurrence pour une fonction du temps
- Exemple : équation du 3ème ordre
- Relations entre la transformée de Laplace et la transformée en z .

Chapitre II : Identification des systèmes linéaires à partir de données échantillonnées. Méthode du pseudo-modèle.

- Aspect général du problème
- Principe d'une méthode d'identification par modèle
- Amélioration de la méthode - Notion de pseudo-modèle
- Mise en oeuvre de l'algorithme - Méthode de Choleski
- Méthode du pseudo-modèle vue comme extension de celle des moindres carrés
- Exemples - Interprétation

Chapitre III : Identification, génération et interpolation de courbes par des équations de récurrences.

- Position du problème - Hypothèses fondamentales
- Identification
- Génération de courbes paramétriques
- Représentativité de l'équation récurrente : Analyse des pôles de $X_T(z)$

- Détermination d'une récurrence interpolatrice
- Etude qualitative de l'erreur de chute dans la génération par récurrence
- Divergence entre $x_T^*(t)$ et $x_{T'}^*(t)$ lors de l'interpolation - Résolution
- Equation de récurrence en cotation relative
Interpolation par la transformée en z modifiée
- Exemples d'application - Interprétation

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

ANNEXES.

INTRODUCTION

L'utilisation des calculateurs numériques occupe une place de plus en plus importante dans la recherche, l'industrie et l'enseignement. La mise au point de machines toujours plus performantes crée la nécessité de les exploiter avec le maximum d'efficacité. Pour cela, il faut disposer de techniques mathématiques bien adaptées au traitement des données numériques.

Dans cette optique, une méthode de simulation numérique des systèmes physiques s'appuyant sur les propriétés de la transformation en z , a été mise au point par M. Véron (1). Le présent travail relève du même souci d'étendre le champ d'application de la théorie des systèmes et signaux échantillonnés.

Après avoir rappelé les relations permettant de déduire une équation de récurrence d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on présente une méthode d'identification des systèmes à partir de données échantillonnées. Cette méthode fournit l'équation de récurrence associée à $\frac{X(z)}{E(z)}$, rapport des transformées en z des fonctions de sortie et d'entrée, pour un système linéaire. Elle a été mise au point dans le but de réunir les avantages des méthodes itératives (2), (3), (4) d'une part, et ceux de la méthode des moindres carrés (4), (5) d'autre part. Elle introduit la notion abstraite de "pseudo-modèle" par opposition à celle de modèle physiquement réalisable utilisée par J. H. Delmas (6), G. A. Bekey (7) ou R. M. Dressler (8). Un certain nombre d'exemples illustrent les performances limites de la méthode proposée.

Afin d'intégrer ce travail aux recherches entreprises par le Centre Universitaire de Commande Numérique dans le domaine de la commande directe des machines-outils par calculateur et de la génération des trajectoires d'outil (9), (10), la méthode du pseudo-modèle est appliquée à l'identification des courbes. Les récurrences ainsi obtenues sont soit directement utilisées pour générer les trajectoires voulues, soit transformées pour réaliser l'interpolation des courbes identifiées. Ce mode de génération par récurrence, illustré par des exemples, permet d'obtenir les points d'une trajectoire à une cadence élevée, ce qui est un avantage pour la commande directe.

I - TRAITEMENT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE PAR LA TRANSFORMATION EN Z.

1) Rappel de la méthode.

Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre h ,

$$x(t) + A_1 \cdot \frac{dx}{dt} + \dots + A_h \cdot \frac{d^h x}{dt^h} = B_0 \cdot e(t) + \dots + B_{h-1} \cdot \frac{d^{h-1} e}{dt^{h-1}} \quad (1.1)$$

Cette équation représente le fonctionnement d'un système soumis à l'entrée $e(t)$ et délivrant la réponse $x(t)$.

La transformée de Laplace appliquée à cette équation donne :

$$X(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_k s^k}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot E(s) \quad (\text{I. 1. b})$$

$$+ \frac{A_1 + A_2 s + \dots + A_h s^{h-1}}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot x(0) - \frac{B_1 + B_2 s + \dots + B_k s^{k-1}}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot e(0)$$

$$+ \frac{A_{q+1} + \dots + A_h s^{h-q-1}}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot x^{(q)}(0) - \frac{B_{q+1} + \dots + B_k s^{k-q-1}}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot e^{(q)}(0)$$

$$+ \frac{A_h}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot x^{(h-1)}(0) - \frac{B_h}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \cdot e^{(k-1)}(0)$$

Si l'on appelle

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_k s^k}{1 + A_1 s + \dots + A_h s^h} \quad (\text{I. 1. c})$$

la fonction de transfert du système, l'équation (I. 1. b) devient :

$$X(s) = H(s) \cdot E(s) + \frac{\sum_{q=0}^{h-1} x^{(q)}(0) \cdot \sum_{i=q+1}^h A_i \cdot s^{i-q-1}}{D(s)} - \frac{\sum_{q=0}^{k-1} e^{(q)}(0) \cdot \sum_{i=q+1}^k B_i \cdot s^{i-q-1}}{D(s)}$$

Cette représentation s'applique aux systèmes continus. Or tout traitement numérique des informations recueillies à propos d'un système suppose que ces informations soient prélevées d'une façon discontinue, c'est-à-dire échantillonnées. On a donc été amené à utiliser la théorie des systèmes échantillonnés et la transformation en z qui en est l'instrument pour représenter et simuler le comportement de tous les systèmes linéaires, continus ou discrets (1), (11), (12). En particulier, le comportement d'un système linéaire de transmittance $H(s)$ peut être reproduit de façon satisfaisante par un système échantillonné de transmittance

$$H(z) = \mathcal{Z}[B(s) \cdot H(s)] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_h z^{-h}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_h z^{-h}} \quad (\text{I. 1. e})$$

où $B(s)$ représente la transmittance de l'extrapolateur.

Dans le cas quasi-général de l'extrapolateur d'ordre zéro, on a :

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] \quad (\text{I. 1. f})$$

Les valeurs prises par la sortie $x(t)$ aux instants d'échantillonnage sont alors liées à celles du signal d'entrée $e(t)$ par une relation de récurrence

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} = b_0 e_n + b_1 e_{n-1} + \dots + b_h e_{n-h} \quad (\text{I. 1. g})$$

$$\text{avec} \quad e_{-1} = e_{-2} = \dots = e_{-h} = 0$$

où les coefficients a_i et b_i sont ceux de $H(z)$.

2) Relation de récurrence pour une fonction du temps.

Toute fonction du temps $x(t)$ qui est une combinaison

linéaire d'exponentielles réelles ou complexes peut être considérée comme la réponse impulsionnelle d'un système linéaire dont la transmittance $X(s)$ est de la forme (I. 1. b).

Si cette fonction $x(t)$ est échantillonnée à la période T , au signal discret

$$x_T^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) \quad (\text{I. 2. a})$$

est associée la transformée en z

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{h-1} z^{-(h-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_h z^{-h}} \quad (\text{I. 2. b})$$

Si l'on applique l'équation (I. 1. g) au système $X(z)$ initialement au repos et soumis à une entrée impulsionnelle telle que

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_i = 0 \quad \forall i > 0 \end{cases} \quad (\text{I. 2. c})$$

on obtient

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b_0 \\ x_1 + a_1 x_0 &= b_1 \\ x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_i x_0 &= b_i \\ x_{h-1} + a_1 x_{h-2} + \dots + a_{h-1} x_0 &= b_{h-1} \\ x_h + a_1 x_{h-1} + \dots + a_h x_0 &= 0 \\ x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 2. d})$$

On peut donc exprimer $X(z)$ uniquement à l'aide des coefficients a_i et des h conditions initiales $(x_0, \dots, x_{h-1})$:

$$X(z) = \frac{x_0 + (x_1 + a_1 x_0)z^{-1} + \dots + (x_i + \dots + a_i x_0)z^{-i} + \dots + (x_{h-1} + \dots + a_{h-1} x_0)z^{-(h-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_h z^{-h}} \quad (\text{I. 2. e})$$

Donc, si $x(t)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles, on peut toujours lui associer une équation de récurrence du type (I. 2. d), dès l'instant où cette fonction est échantillonnée.

3) Exemple : équation du 3ème ordre.

L'exemple présenté ici est destiné à montrer comment on peut passer de façon rigoureuse d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants à l'équation récurrente qui en est la transposition dans le domaine discret.

Soit l'équation

$$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \cdot \dot{x}(t) + \alpha_2 \cdot \dot{x}(t) + \alpha_3 \cdot x(t) = 0 \quad (\text{I. 3. a})$$

La transformation de Laplace appliquée à (I. 3. a) donne donc :

$$X(s) = \frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} \cdot x(0) + \frac{s + \alpha_1}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} \cdot \dot{x}(0) + \frac{1}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} \cdot \ddot{x}(0) \quad (\text{I. 3. b})$$

Avec :

$$\begin{aligned} s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 &= (s + s_1)(s^2 + ps + q) \\ &= (s + s_1) \cdot \left[(s + \gamma)^2 + \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{I. 3. c})$$

On a :

$$\begin{aligned}
 X(s) = & \frac{A_1}{s+s_1} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2 + ps + q} \cdot x(0) \\
 & + \frac{A_2}{s+s_1} + \frac{B_2 s + C_2}{s^2 + ps + q} \cdot x(0) \\
 & + \frac{A_3}{s+s_1} + \frac{B_3 s + C_3}{s^2 + ps + q} \cdot x(0)
 \end{aligned} \quad (\text{I. 3. d})$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} A_1 + B_1 & = 1 \\ A_{1p} + B_1 s_1 + C_1 & = \alpha_1 \\ A_{1q} + C_1 s_1 & = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 & = 0 \\ A_{2p} + B_2 s_1 + C_2 & = 1 \\ A_{2q} + C_2 s_1 & = \alpha_1 \end{cases} \quad (\text{I. 3. e})$$

$$\begin{cases} A_3 + B_3 & = 0 \\ A_{3p} + B_3 s_1 + C_3 & = 0 \\ A_{3q} + C_3 s_1 & = 1 \end{cases}$$

La résolution de ces trois systèmes permet le calcul des A_i , B_i , C_i .

En prenant la transformée inverse de $X(s)$ et en posant

$$D_i = \frac{C_i - B_i \cdot \gamma}{\omega} \quad (\text{I. 3. f})$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left[A_1 \cdot x(0) + A_2 \cdot x(0) + A_3 \cdot x(0) \right] \cdot e^{-s_1 t} \\
 &+ \left[B_1 \cdot x(0) + B_2 \cdot x(0) + B_3 \cdot x(0) \right] \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega t \\
 &+ \left[D_1 \cdot x(0) + D_2 \cdot x(0) + D_3 \cdot x(0) \right] \cdot e^{-\gamma t} \sin \omega t \\
 x(t) &= K_1 \cdot e^{-s_1 t} + K_2 \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega t + K_3 \cdot e^{-\gamma t} \sin \omega t \quad (\text{I. 3. g})
 \end{aligned}$$

Cette fonction $x(t)$, échantillonnée à T , a pour transformée en z :

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{K_1}{1 - e^{-s_1 T} z^{-1}} + \frac{K_2 (1 - z^{-1} e^{-\gamma T} \cos \omega T)}{1 - 2z^{-1} e^{-\gamma T} \cos \omega T + z^{-2} e^{-2\gamma T}} \\
 &+ \frac{K_3 \cdot z^{-1} \cdot e^{-\gamma T} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} e^{-\gamma T} \cos \omega T + z^{-2} e^{-2\gamma T}} \quad (\text{I. 3. h})
 \end{aligned}$$

Il apparaît donc que $X(z)$ a la forme d'une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré inférieur de 1 à celui du dénominateur.

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + a_3 \cdot z^{-3}} \quad (\text{I. 3. i})$$

Avec

$$\left(\begin{aligned}
 b_0 &= K_1 + K_2 \\
 b_1 &= -2 K_1 e^{-\gamma T} \cos \omega T - K_2 (e^{-s_1 T} + e^{-\gamma T} \cos \omega T) \\
 &\quad + K_3 e^{-\gamma T} \sin \omega T \\
 b_2 &= K_1 e^{-2\gamma T} + K_2 e^{-\gamma T} e^{-s_1 T} \cos \omega T - K_3 e^{-\gamma T} e^{-s_1 T} \sin \omega T
 \end{aligned} \right) \quad (\text{I. 3. j})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -e^{-s_1 T} - 2 e^{-\gamma T} \cos \omega T \\ a_2 = e^{-2\gamma T} + 2 e^{-s_1 T} e^{-\gamma T} \cos \omega T \\ a_3 = -e^{-s_1 T} e^{-2\gamma T} \end{array} \right.$$

On vérifie (Annexe I) que l'on a bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = x_0 \\ b_1 = x_1 + a_1 x_0 \\ b_2 = x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 \\ 0 = x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0 \end{array} \right.$$

Il est donc possible de générer de T en T la fonction $x(t)$ définie par l'équation différentielle (I. 3. a) en utilisant une équation discrète de même ordre :

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} = 0 \quad (\text{I. 3. 1})$$

pour $n \geq 3$

Cet exemple, développé pour une équation d'ordre réduit, donne une idée de la longueur des calculs à effectuer dans le cas général. En particulier, un programme de calcul pour ordinateur risque d'être long et volumineux.

4) Relations entre la transformée de Laplace et la transformée en z .

Cette généralisation à un ordre quelconque du passage des équations différentielles aux équations de récurrence utilise les

transformations de Laplace et en z qui leur sont respectivement associées.

La transformée de Laplace d'une suite d'échantillons

$$x^*(t) = \langle x(t) \cdot \delta_T(t) \rangle \quad (\text{I. 4. a})$$

est

$$X^*(s) = \frac{1}{2-j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \frac{1}{1 - e^{-T(s-r)}} dr$$

soit

$$X^*(s) = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{de } X(r)}} \text{Résidus} \frac{X(r)}{1 - e^{-T(s-r)}}$$

ou, en posant $z = e^{Ts}$,

$$X(z) = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{de } X(r)}} \text{Résidus} \frac{X(r)}{1 - e^{Tr} \cdot z^{-1}} \quad (\text{I. 4. c})$$

L'expression générale du résidu d'un pôle a_i , d'ordre p , est :

$$A_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \left\{ (s-a_i)^p \cdot \frac{X(s)}{1 - e^{Ts} \cdot z^{-1}} \right\} \right]_{s=a_i}$$

(I. 4. d)

mais si $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ n'a que des pôles simples, on obtient :

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \frac{N(a_i)}{D'(a_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{a_i T} z^{-1}}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \frac{N(a_i)}{D'(a_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{a_i \cdot T}} \quad (\text{I. 4. e})$$

Par conséquent, la transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$, définie par une équation différentielle, est liée à la transformée en z de la même fonction échantillonnée à la période T . La relation entre les deux transformées concerne les pôles : si a_i est pôle de $X(s)$, alors

$$\beta_i = e^{a_i T} \quad (\text{I. 4. f})$$

est pôle de $X(z)$ et de même ordre.

La transformée en z apparaît donc très bien adaptée au traitement de données numériques, même tirées de processus continus : d'une part, elle fournit une transposition rigoureuse d'une équation différentielle en équation de récurrence ; d'autre part, si l'on établit directement des équations discrètes relatives à un processus ou une fonction continue il est toujours possible, si besoin est, de revenir à une formulation continue.

Cependant, pour un ordre élevé, le calcul rigoureux de la transformée en z d'une fonction est long, en particulier celui des résidus. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à trouver les coefficients de la récurrence par identification.

II - IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES A PARTIR DE DONNEES ECHANTILLONNES. METHODE DU PSEUDO-MODELE.

1) Position du problème.

Etant donné un système soumis à un signal d'entrée $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $x(t)$, le problème est d'établir une relation de récurrence entre les valeurs échantillonnées de $e(t)$ et $x(t)$ aux instants nT . La relation cherchée est une forme linéaire

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} = b_0 e_n + b_1 e_{n-1} + \dots + b_h e_{n-h} \quad (\text{II. 1. a})$$

L'identification du système consiste donc à rechercher les valeurs des coefficients a_i , b_i figurant dans l'équation (II. 1. a) en connaissant les valeurs prises par $e(t)$ et $x(t)$ aux instants d'échantillonnage.

2) Principe des méthodes d'identification par modèle.

La figure 1 illustre le principe des méthodes d'identification avec modèle, que l'on rencontre assez couramment.

Il apparaît que le modèle est ici un système discret à coefficients réglables (a_i , b_i) possédant sa propre équation

$$s_n + \sum_{i=1}^h a_i s_{n-i} = \sum_{i=0}^h b_i e_{n-i} \quad (\text{II. 2. a})$$

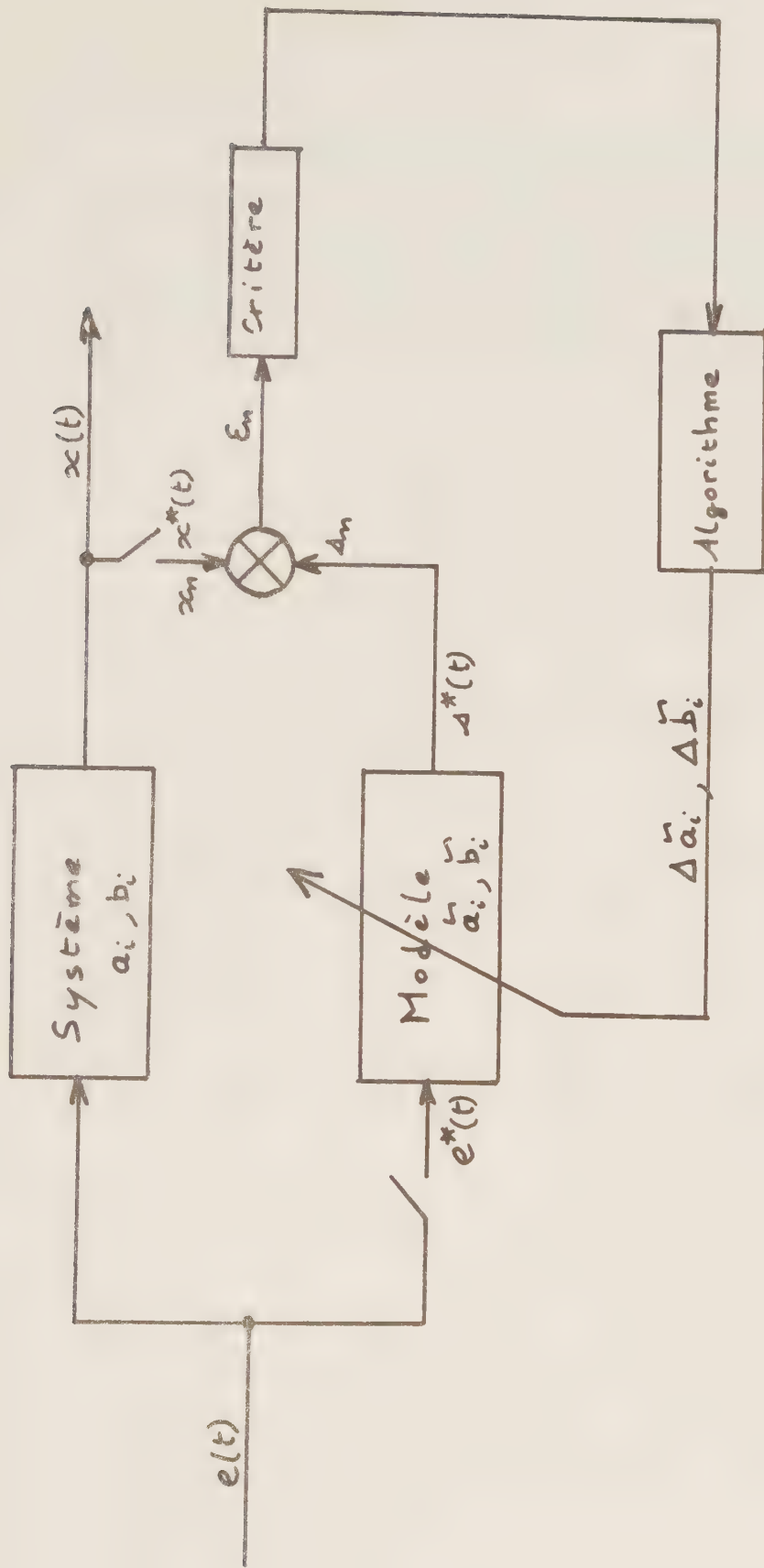


Fig. 1.

Ce modèle a donc une signification physique, même s'il n'est utilisé que sous une forme mathématique. Le réglage de ses paramètres résulte de l'application de l'algorithme tendant à minimiser un critère, en général la somme quadratique des écarts sur un nombre N d'intervalles d'échantillonnage :

$$r = \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \quad (\text{II. 2. b})$$

avec $\xi_n = x_n - s_n \quad (\text{II. 2. c})$

En admettant que le système à identifier est décrit par la récurrence d'ordre h

$$x_n + \sum_{i=1}^h a_i \cdot x_{n-i} = \sum_{i=0}^h b_i \cdot e_{n-i} \quad (\text{II. 2. d})$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \xi_n = & - \sum_{i=1}^h (a_i - \tilde{a}_i) \cdot x_{n-i} + \sum_{i=0}^h (b_i - \tilde{b}_i) \cdot e_{n-i} \\ & - \sum_{i=1}^h \tilde{a}_i \cdot \xi_{n-i} \end{aligned} \quad (\text{II. 2. e})$$

Le terme $\sum_{i=1}^h \tilde{a}_i \cdot \xi_{n-i}$ figurant dans (II. 2. e) indique que tout écart ξ_n a des conséquences sur les h écarts suivants. Ceci ne peut qu'altérer les performances de l'algorithme utilisé, quel qu'il soit.

3) Amélioration de la méthode- Notion de pseudo-modèle.

Pour supprimer l'inconvénient décrit ci-dessus et améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme, il faut éliminer le terme "perturbateur" de l'expression de ξ_n (II. 2. e).

Dans ce sens nous définissons la quantité :

$$x_n^* = - \sum_{i=1}^h \tilde{a}_i \cdot x_{n-i} + \sum_{i=0}^h \tilde{b}_i \cdot e_{n-i} \quad (\text{II. 3. a})$$

où les valeurs vraies x_{n-i} de la sortie du processus pondèrent les coefficients $\tilde{a}_i$.

A partir de x_n^* , on redéfinit l'écart :

$$\xi_n = x_n - x_n^* \quad (\text{II. 3. b})$$

soit

$$\xi_n = - \sum_{i=1}^h (a_i - \tilde{a}_i) \cdot x_{n-i} + \sum_{i=0}^h (b_i - \tilde{b}_i) \cdot e_{n-i} \quad (\text{II. 3. c})$$

A la suite de cette modification, le modèle considéré au paragraphe 2 perd sa signification physique. En effet, il ne se manifeste plus par son propre comportement et sa propre sortie, mais uniquement par l'ensemble des coefficients $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$. Nous l'appellerons "pseudo-modèle" car il n'a plus qu'une signification mathématique. La figure 2 illustre le rôle et le caractère du pseudo-modèle.

Sur un intervalle $[0; NT]$, la somme quadratique des écarts caractérise la qualité de l'identification. On cherche donc le minimum de

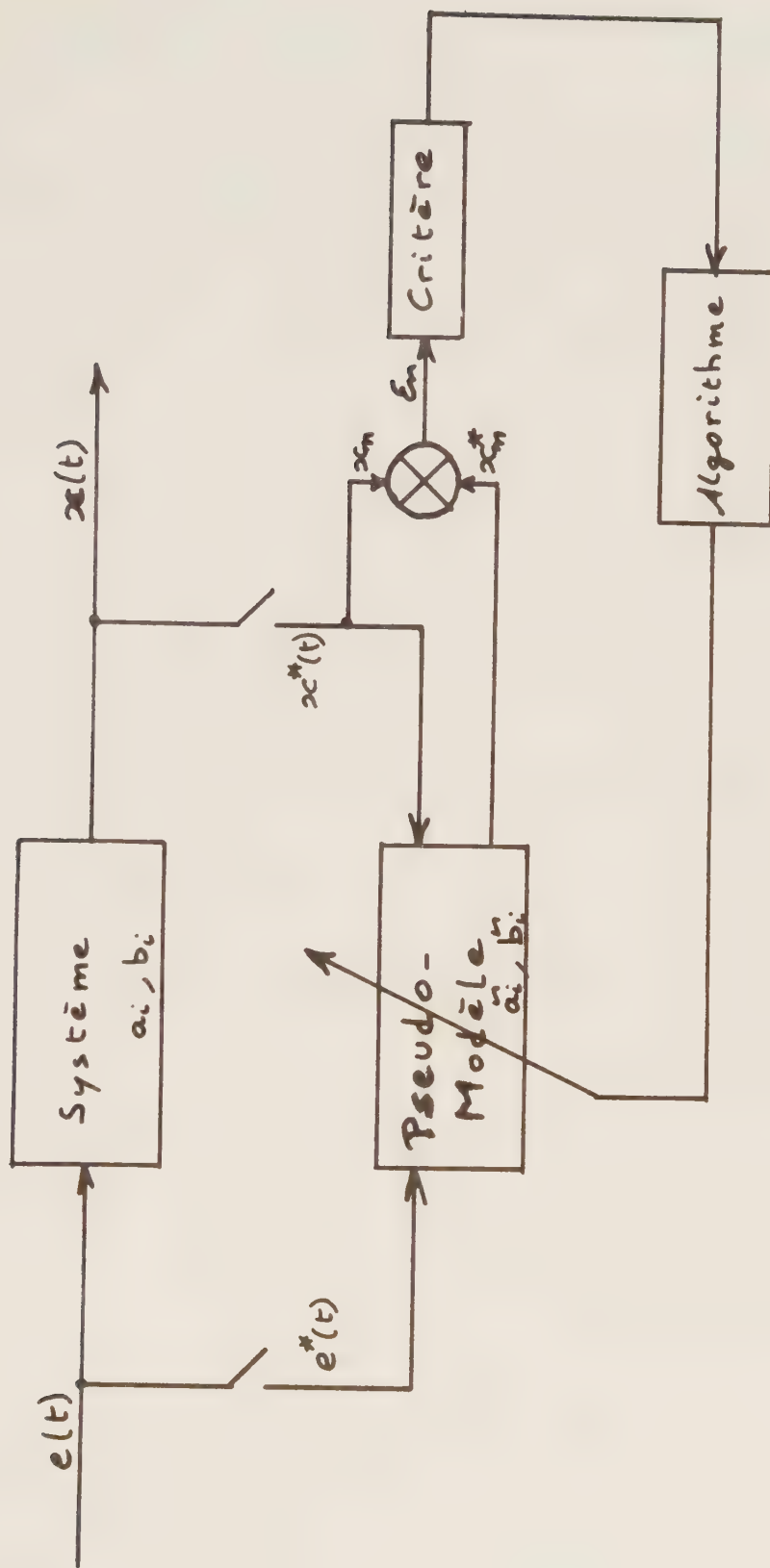


Fig. 2

$$r = \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \quad (\text{II. 3. d})$$

L'algorithme de Gauss - Newton a été choisi plutôt que la méthode des moindres carrés qui semble au premier abord plus adaptée. En fait, comme le montrent les exemples, l'utilisation d'un algorithme confère à la recherche d'optimum un caractère itératif qui permet d'accéder à une meilleure précision.

Si l'on appelle q le vecteur des paramètres à déterminer :

$$q = \left[a_1, \dots, a_h, b_0, b_1, \dots, b_h \right]^T \quad (\text{II. 3. e})$$

l'algorithme de Gauss - Newton fournit la variation du vecteur q :

$$\Delta q = -k \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{grad}_q r \quad (\text{II. 3. f})$$

Les termes de l'algorithme sont :

- son gain k
- le vecteur gradient $\text{grad}_q r$ d'éléments

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{a}_i} = 2 \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot x_{n-i}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{b}_i} = -2 \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot e_{n-i}$$

d'où

$$\text{grad}_q r = 2 \cdot \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot \left[\underbrace{x_{n-i}}_{i=1, \dots, h} \mid \underbrace{-e_{n-j}}_{j=0, \dots, h} \right]^T \quad (\text{II. 3. g})$$

- la matrice des dérivées secondes Ω , composée de 4 sous-matrices d'éléments :

$$\frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{a}_i \cdot \partial \tilde{a}_j} = 2 \cdot \sum_{n=0}^N x_{n-i} \cdot x_{n-j} = \frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{a}_j \cdot \partial \tilde{a}_i}$$

$$\frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{b}_1 \cdot \partial \tilde{a}_j} = -2 \cdot \sum_{n=0}^N e_{n-1} \cdot x_{n-j} = \frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{a}_j \cdot \partial \tilde{b}_1}$$

$$\frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{b}_1 \cdot \partial \tilde{b}_k} = 2 \cdot \sum_{n=0}^N e_{n-1} \cdot e_{n-k} = \frac{\partial^2_r}{\partial \tilde{b}_k \cdot \partial \tilde{b}_1}$$

soit :

$$\Omega = 2 \cdot \sum_{n=0}^N \left[\begin{array}{c|c} x_{n-i} \cdot x_{n-j} & x_{n-i} \cdot e_{n-k} \\ \hline e_{n-l} \cdot x_{n-j} & e_{n-l} \cdot e_{n-k} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, h \\ (II. 3. h) \\ l = 0, \dots, h \end{array} \right\}$$

$j=1, \dots, h \quad k=0, \dots, h$

Remarque :

La matrice Ω est symétrique, ce qui facilite le calcul du vecteur Δq .

4) Mise en oeuvre de l'algorithme - Méthode de Choleski [2] [3]

L'application de l'algorithme de Gauss-Newton nécessite le calcul de la quantité

$$y = \Omega^{-1} \cdot \text{grad}_q r \quad (\text{II. 4. a})$$

La matrice Ω étant symétrique, la résolution de ce système est réalisée par la méthode de Choleski, qui s'applique spécifiquement à ce cas. D'une façon générale, on considère le système

$$B \cdot y = f \quad (\text{II. 4. b})$$

où B est une matrice symétrique,
un vecteur connu,
 y le vecteur inconnu tel que

$$y = B^{-1} \cdot f \quad (\text{II. 4. c})$$

Pour résoudre ce système, on transforme la matrice B en un produit de 2 matrices triangulaires de telle façon que

$$B = R \cdot R^T \quad (\text{II. 4. d})$$

où R est une matrice triangulaire inférieure.

Le système (II. 4. c) se décompose alors en 2 systèmes triangulaires :

$$\begin{aligned} R \cdot g &= f \\ R^T \cdot y &= g \end{aligned} \quad (\text{II. 4. e})$$

que l'on résoud successivement, l'un par indices croissants, l'autre par indices décroissants.

Les éléments de ces systèmes sont :

$$\begin{aligned}
 R_{ii} &= \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{ik}^2} \\
 R_{ij} &= \frac{1}{R_{ii}} \left[b_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{ik} \cdot R_{jk} \right] \quad \text{pour } j < i \quad (\text{II. 4. f}) \\
 g_i &= \frac{1}{R_{ii}} \left[f_i - \sum_{k=1}^{i-1} R_{ik} \cdot g_k \right]
 \end{aligned}$$

La méthode de Choleski présente l'avantage de ne nécessiter aucun calcul de déterminant ; elle peut donc être appliquée à des systèmes de très faible déterminant principal.

On remarque que si $R_{ii} = 0$, la matrice B est reconnue singulière car

$$\Delta_B = \Delta_R^2 \quad \text{et} \quad \Delta_R = \prod_{i=1}^n R_{ii} \quad (\text{II. 4. g})$$

En outre si

$$b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{ik}^2 < 0,$$

il apparaît des termes imaginaires purs sur toute la ligne correspondante de R , ce qui signifie que la matrice B n'est pas définie positive.

5) Méthode du pseudo-modèle comme extension de la méthode des moindres carrés.

Si dans l'équation (II. 3. f) on choisit $k = 1$ et le vecteur q initialement nul, la première itération donne :

$$q = -\Omega^{-1} \text{grad}_q r \quad (\text{II. 5. a})$$

Or, d'après les formes (II. 3. g) (II. 3. h) de Ω et de $\text{grad}_q r$, il apparaît que l'équation (II. 5. a) est identique à la formulation par la méthode des moindres carrés présentée notamment par Aström et Eykhoff (5)

Cependant, l'expérience montre que dans certains cas la précision obtenue après la première itération s'améliore considérablement si on applique l'algorithme une ou deux fois de plus. Or il importe d'obtenir la meilleure précision possible car les coefficients (a_i, b_i) sont des combinaisons d'exponentielles négatives : leur sensibilité est donc très grande et il est nécessaire de garantir au moins 5 décimales pour chacun d'eux.

6) Exemples d'application - Interprétation.

a) Identification d'un système pour différentes périodes.

Considérons le système initialement au repos, soumis à l'entrée échelon unité et délivrant en sortie un signal d'équation

$$x(t) = 1 - e^{-t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t \quad (\text{IV. 1. a})$$

L'identification porte sur l'intervalle de temps $[0 ; 15]$,
pour des périodes valant successivement :

$$T = 1,5$$

$$T = 1$$

$$T = 0,5$$

$$T = 0,2$$

$$T = 0,1$$

puis sur $150 T$ avec

$$T = 0,05$$

$$T = 0,01$$

Pour ce système, le calcul théorique donne :

$$\frac{X(z)}{E(z)} = \frac{(1 - e^{-T} \cos T - e^{-T} \sin T) z^{-1} + (e^{-2T} - e^{-T} \cos T + e^{-T} \sin T) z^{-2}}{1 - 2z^{-1} e^{-T} \cos T + e^{-2T} z^{-2}}$$

Le tableau 1 porte les résultats obtenus pour les différentes périodes par la méthode du pseudo-modèle, le nombre des itérations effectuées, la valeur du critère r et les résultats du calcul théorique à titre indicatif.

L'analyse de ces résultats montre que la méthode du pseudo-modèle donne au moins 7 décimales pour chaque coefficient. La fonction $\frac{X(z)}{E(z)}$ trouvée par identification est donc réellement l'optimum pour des fonctions $e(t)$ et $x(t)$ données.

TABLEAU 1.

T	$\frac{X(z)}{E(z)}$ identifié	nombre d'itérations	r	$\frac{X(z)}{E(z)}$ théorique
1,5	$\frac{0,76164518 \cdot z^{-1} + 0,25657468 \cdot z^{-2}}{1 - 0,03156720 \cdot z^{-1} + 0,04978707 \cdot z^{-2}}$	3	$0,2 \cdot 10^{-17}$	$\frac{0,76164518 \cdot z^{-1} + 0,25657468 \cdot z^{-2}}{1 - 0,03156720 \cdot z^{-1} + 0,04978707 \cdot z^{-2}}$
1,0	$\frac{0,49167402 \cdot z^{-1} + 0,24612906 \cdot z^{-2}}{1 - 0,39753217 \cdot z^{-1} + 0,13533528 \cdot z^{-2}}$	2	$0,1 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,49167401 \cdot z^{-1} + 0,24612904 \cdot z^{-2}}{1 - 0,39753222 \cdot z^{-1} + 0,13533528 \cdot z^{-2}}$
0,5	$\frac{0,17693298 \cdot z^{-1} + 0,12638499 \cdot z^{-2}}{1 - 1,0645614 \cdot z^{-1} + 0,36787944 \cdot z^{-2}}$	3	$0,2 \cdot 10^{-16}$	$\frac{0,17693298 \cdot z^{-1} + 0,12638499 \cdot z^{-2}}{1 - 1,0645614 \cdot z^{-1} + 0,36787944 \cdot z^{-2}}$
0,2	$\frac{0,03493267 \cdot z^{-1} + 0,03056608 \cdot z^{-2}}{1 - 1,6048212 \cdot z^{-1} + 0,67032004 \cdot z^{-2}}$	3	$0,2 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,03493266 \cdot z^{-1} + 0,03056609 \cdot z^{-2}}{1 - 1,6048212 \cdot z^{-1} + 0,67032004 \cdot z^{-2}}$
0,1	$\frac{0,00935000 \cdot z^{-1} + 0,00874676 \cdot z^{-2}}{1 - 1,8006340 \cdot z^{-1} + 0,81873075 \cdot z^{-2}}$	3	$0,3 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,00934999 \cdot z^{-1} + 0,00874676 \cdot z^{-2}}{1 - 1,8006340 \cdot z^{-1} + 0,81873075 \cdot z^{-2}}$
0,05	$\frac{0,00241771 \cdot z^{-1} + 0,00233843 \cdot z^{-2}}{1 - 1,9000812 \cdot z^{-1} + 0,90483741 \cdot z^{-2}}$	3	$0,2 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,00241771 \cdot z^{-1} + 0,00233844 \cdot z^{-2}}{1 - 1,9000812 \cdot z^{-1} + 0,90483741 \cdot z^{-2}}$
0,01	$\frac{0,993 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-1} + 0,986 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9800006 \cdot z^{-1} + 0,98019868 \cdot z^{-2}}$	3	$0,2 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,993 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-1} + 0,986 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9800006 \cdot z^{-1} + 0,98019867 \cdot z^{-2}}$

Dans les exemples cités ici il a fallu en général 3 itérations pour obtenir un critère de l'ordre de 10^{-16} . En réalité, on aurait pu se contenter du résultat de la première itération donnant en moyenne $r \simeq 10^{-11}$.

L'exemple suivant décrit un cas de convergence plus lente et montre ainsi qu'on ne saurait se contenter d'une simple méthode des moindres carrés.

b) Développement de l'identification.

On considère la réponse indicielle du système

$$H(s) = \frac{1000}{(s+10)(s+0,23607)(s+4,23607)}$$

échantillonnée à la période $T = 0,1$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

Le tableau 2 montre l'évolution des résultats au cours des itérations successives. On peut noter l'évolution du critère quadratique ainsi que celle du vecteur Δq qui représente la correction effectuée sur les coefficients et par conséquent la précision avec laquelle ils sont donnés.

Remarque:

Il arrive que le critère r demeure relativement élevé alors que le vecteur Δq est de module quasiment nul. Il faut alors en conclure que la nature du modèle est insuffisante pour identifier correctement le système.

TABLEAU 2

Iteration	q	r	$-\Delta q$	$q+\Delta q$
1	0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00	91237,65	1,9867250 -1,2177862 0,2258924 -0,0008602 -0,1162204 -0,3366049 -0,0628224	-1,9867250 1,2177862 -0,2258924 0,0008602 0,1162204 0,3366049 0,0628224
2	-1,9867250 1,2177862 -0,2258924 0,0008602 0,1162204 0,3366049 0,0628224	$0,367 \cdot 10^{-5}$	0,0124064 -0,0215897 0,0092588 0,0000000 0,0000075 0,0014492 0,0057275	-1,9991314 1,2393760 -0,2351512 0,0008602 0,1162129 0,3351557 0,0570949
3	-1,9991314 1,2393760 -0,2351512 0,0008602 0,1162129 0,3351557 0,0570949	$0,225 \cdot 10^{-9}$	0,0000971 -0,0001689 0,0000724 0,0000000 0,0000000 0,0000113 0,0000450	-1,9992286 1,2395449 -0,2352236 0,0008602 0,1162128 0,3351443 0,0570498
4	-1,9992286 1,2395449 -0,2352236 0,0008602 0,1162128 0,3351443 0,0570498	$0,387 \cdot 10^{-12}$	0,0000006 -0,0000010 0,0000004 0,0000000 0,0000000 0,0000000 0,0000003	-1,9992292 1,2395560 -0,2352241 0,0008602 0,1162129 0,3351443 0,0570497
	-1,9992292 1,2395560 -0,2352241 0,0008602 0,1162129 0,3351443 0,0570497	$0,417 \cdot 10^{-12}$	0,0 0,0 0,0 0,0 0,0 0,0 0,0	

c) Identification d'un même système pour différentes entrées

La méthode a été appliquée au système

$$H(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+6s)}$$

soumis à différentes fonctions d'entrée, afin de comparer les différentes expressions de $\frac{X(z)}{E(z)}$ obtenues.

Les fonctions d'entrée sont successivement :

- $e(t) = u(t)$, l'échelon unité
 - $e(t) = t \cdot u(t)$, l'échelon vitesse ou rampe
 - $e(t) = e^{-t} \cdot u(t)$, l'exponentielle décroissante
 - un signal composé de 3 fonctions :
- $$\begin{aligned} e(t) &= u(t) && \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ e(t) &= t && \text{pour } 1 \leq t \leq 3 \\ e(t) &= 3 \cdot e^{-(t-3)} && \text{pour } 3 \leq t \end{aligned}$$

Le système $H(s)$ réagit à ces signaux en fournissant respectivement les fonctions suivantes :

$$- x(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-t/2} - 1,5 \cdot e^{-t/6}$$

$$- x(t) = t - 8 + e^{-t/2} - 9 \cdot e^{-t/6}$$

$$- x(t) = 0,2 \cdot e^{-t} - 0,5 \cdot e^{-t/2} + 0,3 \cdot e^{-t/6}$$

$$- x_1(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-t/2} - 1,5 \cdot e^{-t/6} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

$$x_2(t) = x_1(t) + t - 9 + e^{-\frac{t-1}{2}} - 9 \cdot e^{-\frac{t-1}{6}} \quad \text{pour } 1 \leq t \leq 3$$

$$x_3(t) = x_2(t) - t + 8 + 0,6 \cdot e^{-(t-3)} - 2 \cdot e^{-\frac{t-1}{2}} - 3,6 \cdot e^{-\frac{t-3}{6}} \quad \text{pour } 3 \leq t$$

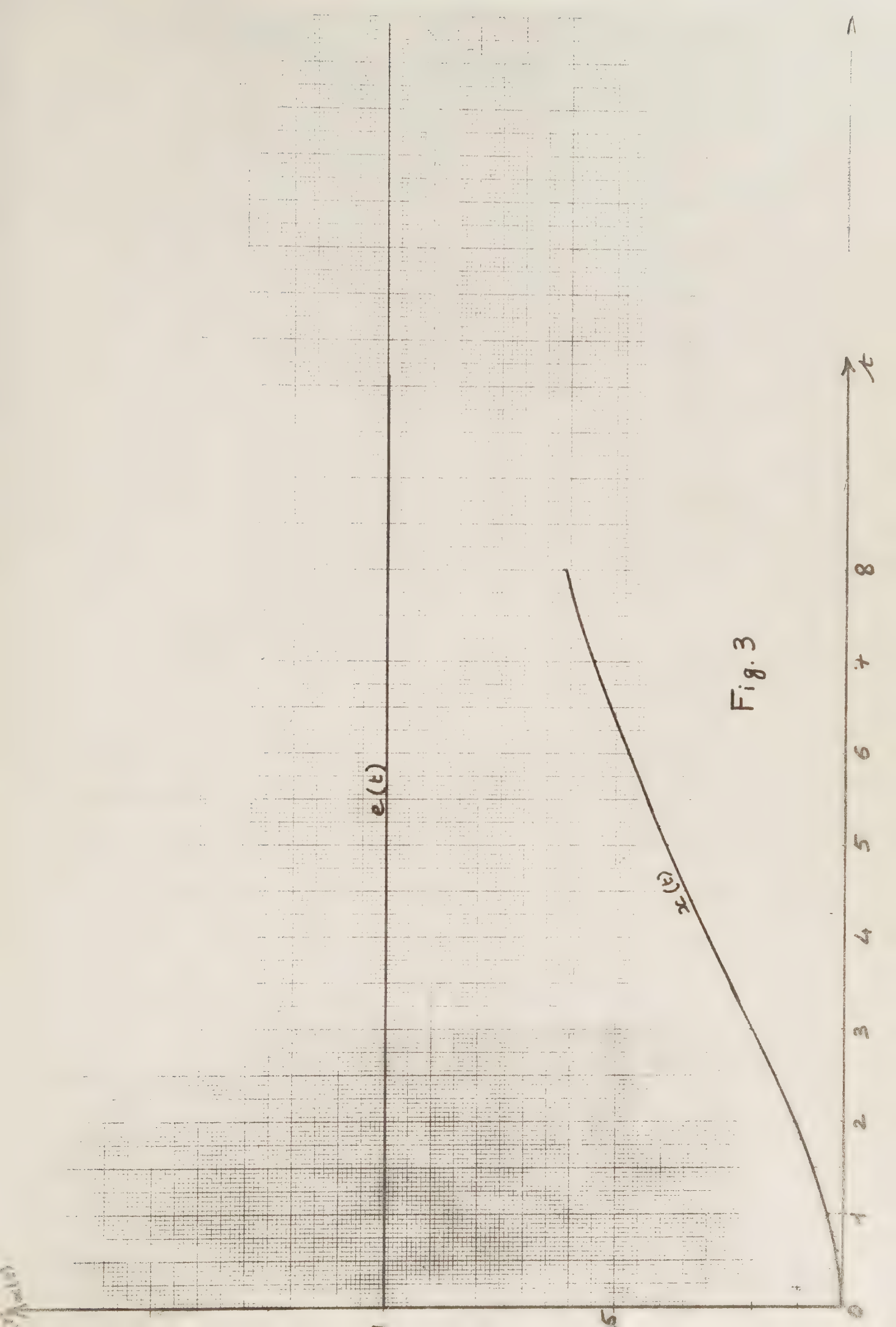


Fig. 3

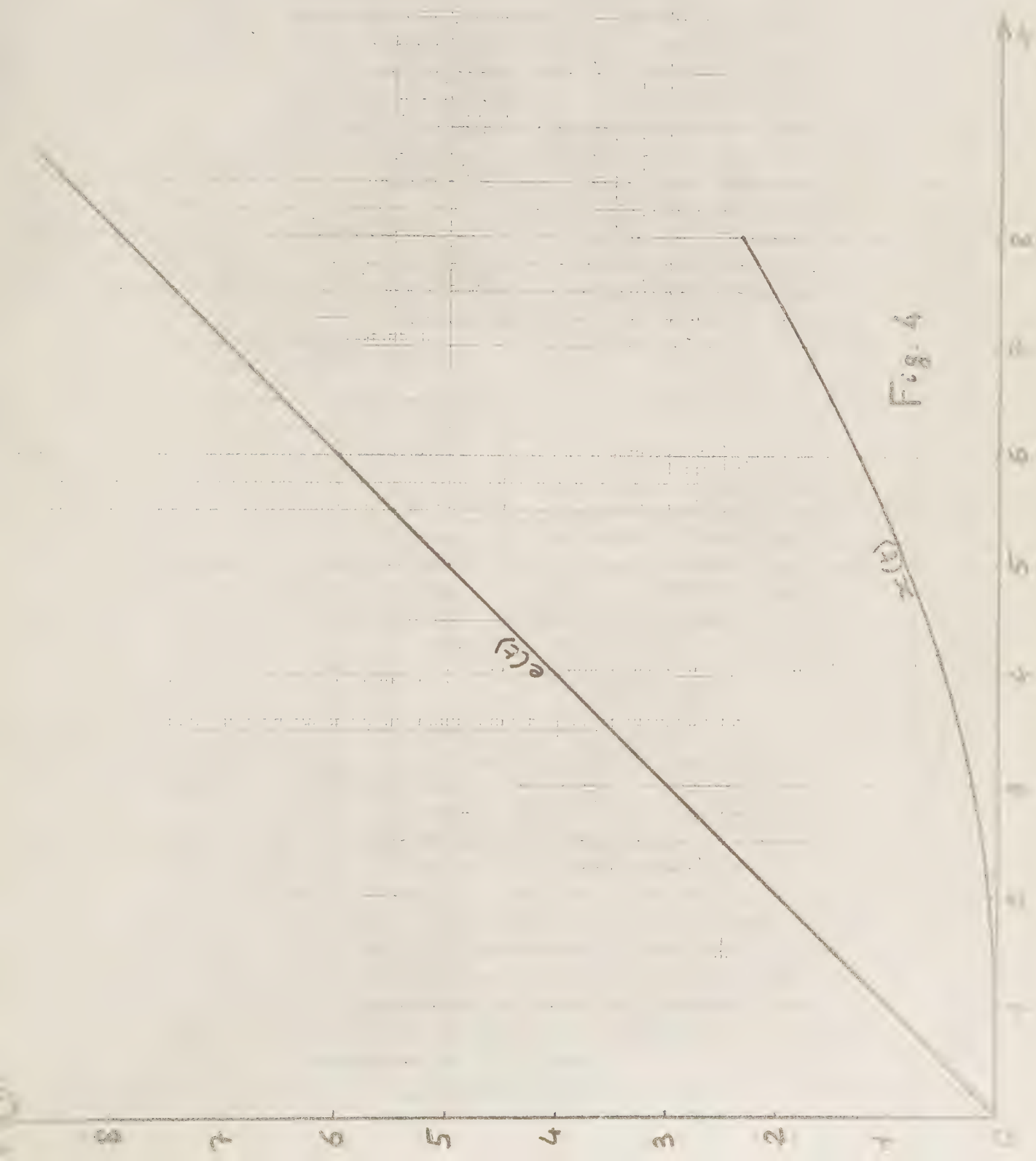


Fig. 4

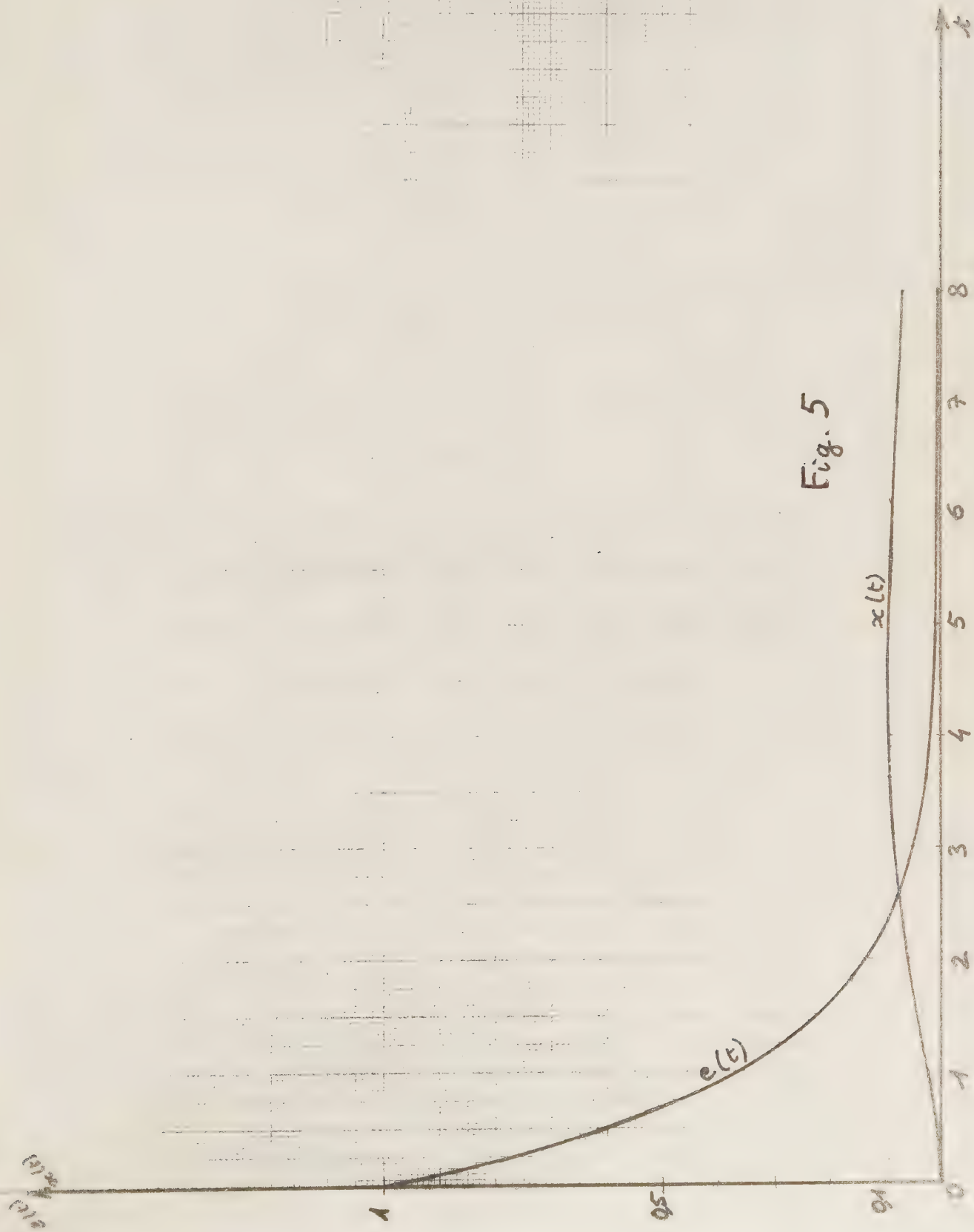


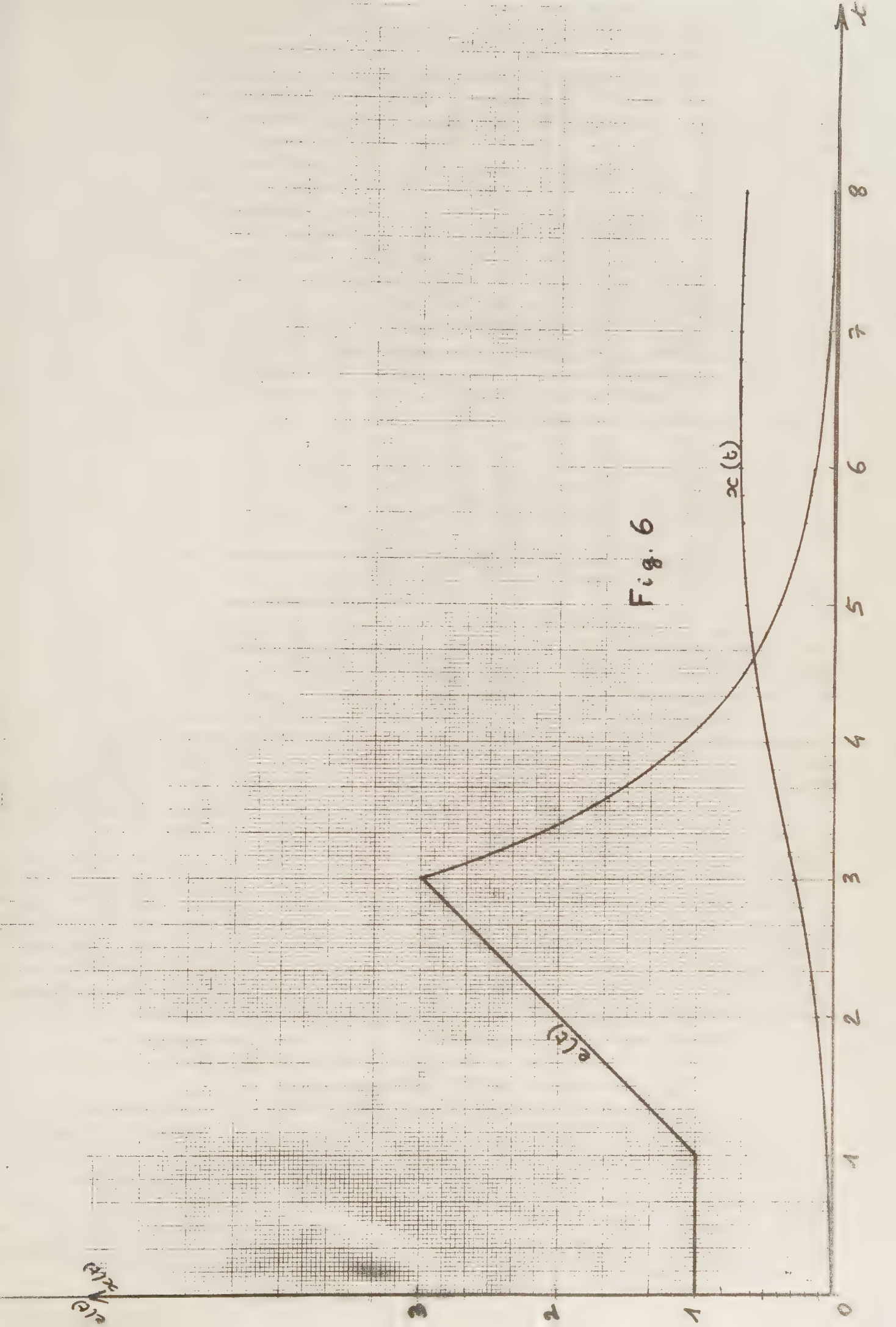
Fig. 5

$x(t)$

Fig. 6

$x(t)$

$x(t)$



TABEAU 3

source	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	r
$u(t)$	- 1, 8720521	0, 8751719	$0, 3. 10^{-11}$	$0, 15449. 10^{-2}$	$0, 152517. 10^{-2}$	$0, 25. 10^{-12}$
$t, u(t)$	- 1, 8720654	0, 8751843	$0, 55463. 10^{-2}$	$0, 206604. 10^{-2}$	$0, 49824. 10^{-3}$	$0, 42. 10^{-12}$
$e^{-t}, u(t)$	- 1, 8720513	0, 8751711	$- 0, 13. 10^{-14}$	$0, 149220. 10^{-2}$	$0, 133544. 10^{-2}$	$0, 10. 10^{-12}$
mixte	- 1, 8663509	0, 8694993	$0, 04396. 10^{-2}$	$0, 16802. 10^{-2}$	$0, 10796. 10^{-2}$	$0, 78. 10^{-6}$

Les différentes fonctions d'entrée sont représentées sur les figures 3 à 6 avec les sorties correspondantes.

L'identification est réalisée avec une période $T = 0,2$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$. Les résultats sont présentés tableau 3.

On constate immédiatement que l'identification sur les 3 fonctions simples a été réalisée dans de bonnes conditions, alors que dans le cas d'une fonction plus compliquée, le critère quadratique conserve une valeur relativement élevée. Néanmoins, l'étude des résultats numériques montre que la fonction de sortie est reproduite à 3 décimales près.

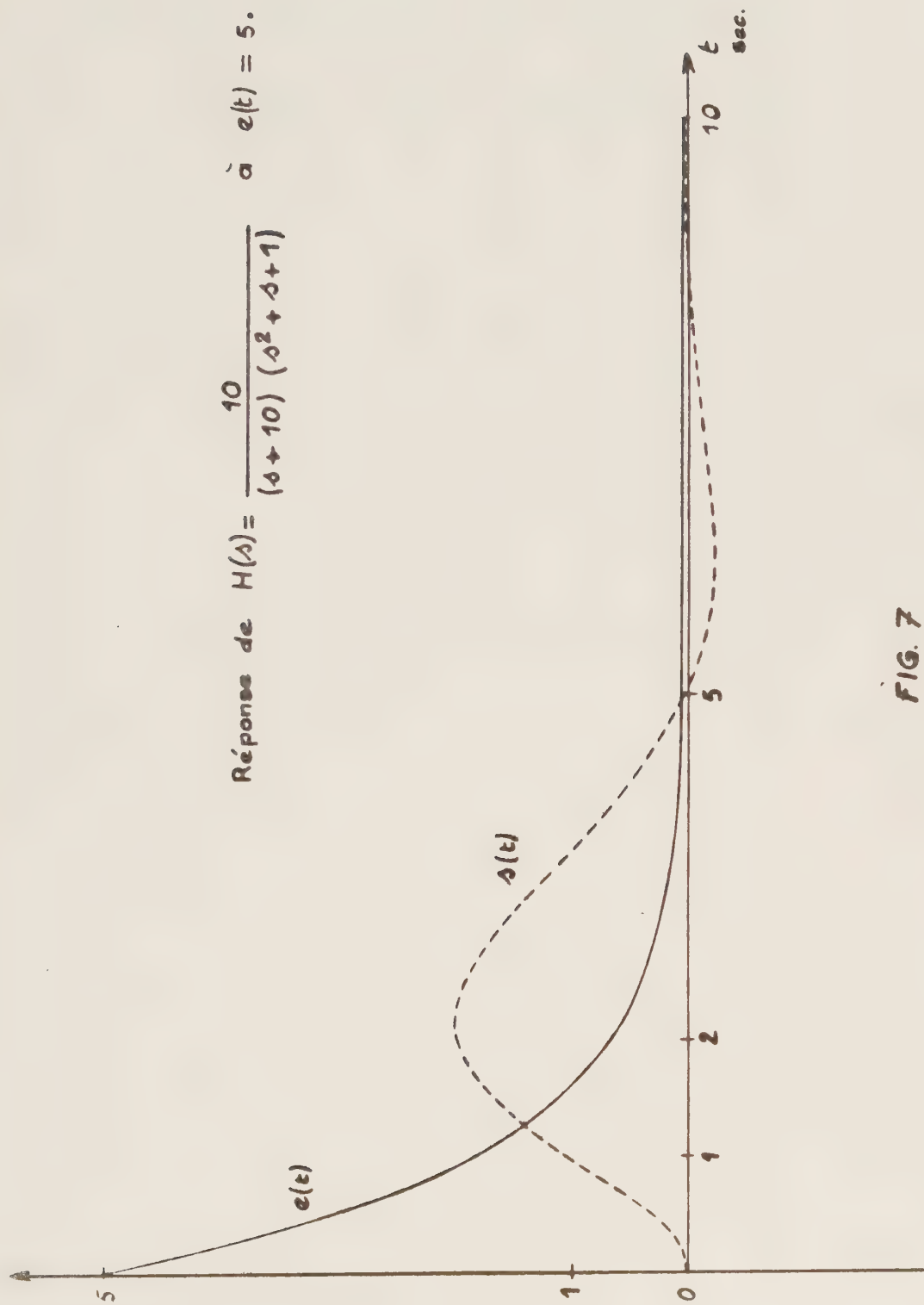
D'autre part, l'étude des coefficients montre que les coefficients a_i , c'est-à-dire ceux du dénominateur de $\frac{X(z)}{E(z)}$ conservent la même valeur à 10^{-5} près pour les 3 premières fonctions et à 0,06 près pour la quatrième. Le dénominateur de $\frac{X(z)}{E(z)}$ est donc invariant [13]. Par contre, le numérateur dépend de la nature de l'entrée, ce qui est normal puisque $X(z)$ en dépend.

d) Représentation d'un même système par différents modèles.

Dans les exemples précédents, il est implicitement supposé que l'ordre du système est connu. Il peut arriver que l'ordre du modèle ne corresponde pas à celui du système. Pour considérer un tel cas, nous réalisons l'identification du système

$$H(s) = \frac{10}{(s+10)(s^2+s+1)}$$

soumis à l'entrée $e(t) = 5 \cdot e^{-t}$, avec des récurrences d'ordre $h = 2, 3$ et 4 .



Réponses de $H(s) = \frac{10}{(s+10)(s^2+s+1)}$ à $e(t) = 5 \cdot e^{-t}$

FIG. 7

TABLEAU 4

h	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	r	h
2	-1,80349	0,83741			-0,6.10 ⁻⁵	0,77585.10 ⁻²	0,02211			0,49.10 ⁻³	2
3	-1,91793	1,05997	-0,11080		-0,6.10 ⁻⁵	0,77592.10 ⁻²	0,01819	0,23666.10 ⁻²		0,18.10 ⁻⁹	2
4	-2,65344	2,47105	-0,89117	0,08184	-0,6.10 ⁻⁵	0,77636.10 ⁻²	0,01249	-0,01101	0,17311.10 ⁻²	0,29.10 ⁻⁸	3

La fonction $e(t)$ ainsi que la réponse $x(t)$ sont représentées figure 7.

Le tableau 4 présente les coefficients obtenus dans chaque cas ainsi que la valeur de r et le nombre k des itérations nécessaires pour l'obtenir.

Dans le cas où l'ordre h de la récurrence est inférieure à celui du système, l'identification est très approximative et le critère reste élevé.

Si l'ordre de la récurrence est supérieur ou égal à celui du système la convergence est évidemment meilleure. Une représentation sur dimensionnée peut être mise en évidence par le fait que la transformée en z obtenue possède des pôles et des zéros égaux, donc simplifiables [14]. Dans le cas particulier de l'exemple traité, pour $h = 4$, le numérateur et le dénominateur de $\frac{X(z)}{E(z)}$ contiennent tous deux le facteur $(1 - 0,7357 \cdot z^{-1})$.

Remarque :

Dans cet exemple, et même pour les ordres $h = 3$ et 4 , la valeur de r demeure très supérieure à celle obtenue dans les exemples précédents. Cela est simplement dû au fait que nous avons arrêté l'itération dès que r devient inférieur à 10^{-8} , le but de l'exemple n'étant pas de démontrer les performances de la méthode sur le plan de la qualité d'identification.

e) Evolution des résultats dans le temps.

Le résultat médiocre obtenu au paragraphe c pour la quatrième fonction

d'entrée a justifié un nouvel essai sur cette fonction, mais dans des conditions différentes.

Au lieu de réaliser l'identification sur tout l'intervalle $[0 ; 8]$, ce qui revient à prendre en compte les 2 discontinuités de $e(t)$, on identifie le système sur des intervalles successifs d'amplitude 2, avec une période d'échantillonnage $T = 0,05$.

Le tableau 5 donne les fonctions $\frac{X(z)}{E(z)}$ obtenues pour ces intervalles successifs. Les coefficients varient tous dans le même ordre de grandeur, mais la variation relative est plus sensible pour ceux du numérateur, qui sont plus petits.

On a fait 3 itérations sur l'intervalle $[0 ; 2]$ afin d'obtenir des coefficients avec une excellente précision, puis chaque intervalle de 2 est l'objet d'une itération à partir des coefficients obtenus sur le précédent. Les listings donnant le détail des fonctions d'entrée et de sortie au cours de l'identification sont présentés en Annexe II.

Les coefficients obtenus au troisième intervalle demeurent valables pour le quatrième et le cinquième, au cours desquels la fonction d'entrée demeure la même. Au cours du cinquième, celle-ci devient trop faible et la matrice de l'algorithme devient singulière.

Si l'on compare la qualité de l'identification à celle obtenue pour le même système au paragraphe c, il apparaît une amélioration considérable. Dans le cas où la fonction d'entrée est composée de plusieurs signaux successifs, on a donc intérêt à découper l'intervalle de façon à ne prendre en compte qu'une discontinuité à la fois.

TABLEAU 5

Intervalle	Critère	$\frac{X(z)}{E(z)}$ identifié
$[0; 2]$	$0,630 \cdot 10^{-10}$	$\frac{0,59 \cdot 10^{-6} + 0,103 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-1} + 0,100 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9676055 \cdot z^{-1} + 0,96776486 \cdot z^{-2}}$
$[2,05; 4,05]$	$0,211 \cdot 10^{-7}$	$\frac{0,347 \cdot 10^{-4} + 0,136 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-1} + 0,335 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9670080 \cdot z^{-1} + 0,96721292 \cdot z^{-2}}$
$[4,10; 6,10]$	$0,229 \cdot 10^{-13}$	$\frac{0,519 \cdot 10^{-4} + 0,128 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-1} + 0,260 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9670116 \cdot z^{-1} + 0,96721654 \cdot z^{-2}}$
$[6,15; 8,15]$	$0,775 \cdot 10^{-15}$	$\frac{0,518 \cdot 10^{-4} + 0,128 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-1} + 0,260 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2}}{1 - 1,9670116 \cdot z^{-1} + 0,96721655 \cdot z^{-2}}$
$[8,20; 10,20]$	$0,812 \cdot 10^{-15}$	

f) Fonctionnement en temps réel.

Dans l'exemple précédent, le premier intervalle est l'objet de 3 itérations. En ne prenant qu'une itération par intervalle, on peut envisager un mode opératoire en temps réel.

C'est de cette façon que nous traitons l'exemple suivant, relatif à la transmittance

$$H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+0,2)(s+5)}$$

soumise au signal

$$e(t) = \sin \frac{t}{2}$$

Les fonctions $e(t)$ et $x(t)$ sont échantillonnées à $T = 0,1$ et chaque intervalle d'identification a une amplitude de $50 T$. Le tableau 6 présente les résultats obtenus. A titre de référence, le même exemple est traité, avec une identification plus fine sur le premier intervalle ; les résultats sont donnés au tableau 7.

Dans le premier cas, l'identification grossière des 3 premiers intervalles, donc du régime transitoire a une influence considérable sur les coefficients. C'est ce qui explique la différence entre les résultats dans les deux cas. Il est donc indispensable d'identifier très précisément le premier intervalle, qui contient le plus d'information sur le régime transitoire. On constate en effet qu'à partir du quatrième intervalle, le critère r reste du même ordre dans les deux cas. Les deux systèmes ont donc le même régime permanent.

TABLEAU 6

Intervalle	Critère	$\frac{X(z)}{E(z)}$ identifié
$[0 ; 5]$	735,66 à la première itération	$\frac{0,450 \cdot 10^{-3} + 0,8496 \cdot 10^{-2} \cdot z^{-1} + 0,1996 \cdot 10^{-2} \cdot z^{-2} + 0,01738 \cdot z^{-3}}{1 - 2,0743833 \cdot z^{-1} + 1,2352200 \cdot z^{-2} - 0,15933016 \cdot z^{-3}}$
$[5, 10; 10, 10]$	$0,219 \cdot 10^{-4}$	$\frac{-0,679 \cdot 10^{-2} + 0,461 \cdot 10^{-2} \cdot z^{-1} - 0,990 \cdot 10^{-4} \cdot z^{-2} + 0,01624 \cdot z^{-3}}{1 - 2,9468308 \cdot z^{-1} + 2,9384188 \cdot z^{-2} - 0,99140945 \cdot z^{-3}}$
$[10, 2; 15, 2]$	$0,212 \cdot 10^{-3}$	$\frac{0,0961 - 0,0710 \cdot z^{-1} - 0,0365 \cdot z^{-2} + 0,0024 \cdot z^{-3}}{1 - 2,9896740 \cdot z^{-1} + 2,9504318 \cdot z^{-2} - 0,96132647 \cdot z^{-3}}$
$[15, 3; 20, 3]$	$0,125 \cdot 10^{-11}$	$\frac{0,0961 - 0,0710 \cdot z^{-1} - 0,0365 \cdot z^{-2} + 0,0024 \cdot z^{-3}}{1 - 2,9896642 \cdot z^{-1} + 2,9504166 \cdot z^{-2} - 0,96132111 \cdot z^{-3}}$
$[20, 4; 25, 4]$	$0,630 \cdot 10^{-12}$	$\frac{0,0960 - 0,0708 \cdot z^{-1} - 0,0364 \cdot z^{-2} + 0,0024 \cdot z^{-3}}{1 - 2,9895596 \cdot z^{-1} + 2,9502724 \cdot z^{-2} - 0,96128053 \cdot z^{-3}}$
$[25, 5; 30, 5]$	$0,100 \cdot 10^{-11}$	$\frac{0,0959 - 0,0708 \cdot z^{-1} - 0,0364 \cdot z^{-2} + 0,0024 \cdot z^{-3}}{1 - 2,9900488 \cdot z^{-1} + 2,9509403 \cdot z^{-2} - 0,96145604 \cdot z^{-3}}$

TABLEAU 7

Intervalle	Critère	$\frac{X(z)}{E(z)}$ identifié
$0; 5]$	$0,246.10^{-13}$ après 8 itérations	$\frac{0,739.10^{-3} + 0,721.10^{-2}.z^{-1} + 0,637.10^{-2}.z^{-2} + 0,509.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4915644.z^{-1} + 2,0302482.z^{-2} - 0,53794238.z^{-3}}$
$0; 10, 10]$	$0,147.10^{-12}$	$\frac{0,737.10^{-3} + 0,721.10^{-2}.z^{-1} + 0,637.10^{-2}.z^{-2} + 0,509.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4917190.z^{-1} + 2,0305496.z^{-2} - 0,53808941.z^{-3}}$
$0; 15, 20]$	$0,777.10^{-11}$	$\frac{0,758.10^{-3} + 0,720.10^{-2}.z^{-1} + 0,637.10^{-2}.z^{-2} + 0,506.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4917271.z^{-1} + 2,0305521.z^{-2} - 0,53808393.z^{-3}}$
$0; 20, 30]$	$0,431.10^{-12}$	$\frac{0,852.10^{-3} + 0,712.10^{-2}.z^{-1} + 0,634.10^{-2}.z^{-2} + 0,499.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4918288.z^{-1} + 2,0307081.z^{-2} - 0,53813890.z^{-3}}$
$0; 25, 40]$	$0,627.10^{-12}$	$\frac{0,500.10^{-3} + 0,747.10^{-2}.z^{-1} + 0,637.10^{-2}.z^{-2} + 0,511.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4916079.z^{-1} + 2,0304035.z^{-2} - 0,5380532.z^{-3}}$
$0; 30, 50]$	$0,772.10^{-12}$	$\frac{0,471.10^{-3} + 0,745.10^{-2}.z^{-1} + 0,637.10^{-2}.z^{-2} + 0,507.10^{-3}.z^{-3}}{1 - 2,4918266.z^{-1} + 2,0307021.z^{-2} - 0,53813169.z^{-3}}$

III - IDENTIFICATION, GENERATION ET INTERPOLATION DE COURBES PAR DES EQUATIONS DE RECURRENCE.

1) Position du problème - Hypothèses fondamentales.

On considère une courbe dans l'espace, connue en un nombre fini de points :

$$M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}, M_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \dots, M_n \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{vmatrix}, \dots, M_N \begin{vmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{vmatrix} \quad (\text{III. 1. a})$$

Le développement du présent chapitre repose sur 2 hypothèses :

1ère hypothèse :

Les suites $(x_0, \dots, x_n, \dots, x_N)$
 $(y_0, \dots, y_n, \dots, y_N)$
 $(z_0, \dots, z_n, \dots, z_N)$ résultent de l'échantillonnage à une période T de 3 fonctions d'un même paramètre t (que nous nommerons "temps"), respectivement

$$\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix} \text{ de telle sorte que}$$

$$\begin{cases} x_n = x(nt) \\ y_n = y(nt) \\ z_n = z(nt) \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N \quad (\text{III. 1. b})$$

2ème hypothèse :

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont des combinaisons linéaires

d'exponentielles réelles ou complexes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{h_x} C_{x,i} \cdot e^{s_{x,i} \cdot t} \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{h_y} C_{y,i} \cdot e^{s_{y,i} \cdot t} \\ z(t) &= \sum_{i=0}^{h_z} C_{z,i} \cdot e^{s_{z,i} \cdot t} ; \end{aligned} \quad (\text{III. 1. c})$$

où les coefficients C et s peuvent être réels ou complexes, les éléments complexes étant 2 à 2 conjugués.

Le problème qui se pose maintenant est d'établir trois équations de récurrence en x , y et z satisfaisant à ces deux hypothèses ; la suite (III. 1. a) doit être le résultat de la synchronisation de ces trois récurrences.

On considère donc qu'une courbe dans l'espace se décompose en trois fonctions du temps. Le traitement d'une telle courbe revient à résoudre trois fois le même problème. Par conséquent, la méthode sera développée pour un seul axe, c'est-à-dire pour une fonction du temps. L'extension à plusieurs axes sera réalisée au niveau des applications.

2) Identification d'une fonction du temps.

Soit une suite $(x_0, \dots, x_N)$ supposée résulter d'une fonction $x(t)$ échantillonnée à la période T . La suite $(x_0, \dots, x_N)$ appartient donc à

$$x^*(t) = \langle x(t), \delta_T(t) \rangle \quad (\text{III. 2. a})$$

où $\delta_T(t)$ est une suite infinie de distributions de Dirac :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (\text{III. 2. b})$$

Puisque $x(t)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles, la transformée en z de $x_T^*(t)$ est une fraction rationnelle de la forme

$$X_T(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{h-1} z^{-h+1}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_h z^{-h}} \quad (\text{III. 2. c})$$

D'autre part, on peut considérer $x_T^*(t)$ comme la réponse du système échantillonné de transmittance $X_T(z)$ à l'impulsion unité et écrire :

$$\begin{aligned} b_0 &= x_0 \\ b_1 &= x_1 + a_1 x_0 \\ &\dots \\ b_{h-1} &= x_{h-1} + a_1 x_{h-2} + \dots + a_{h-1} x_0 \\ 0 &= x_h + a_1 x_{h-1} + \dots + a_h x_0 \\ &\dots \\ 0 &= x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{III. 2. d})$$

Les coefficients b_i sont ainsi fonctions des a_i et des conditions initiales.

Il est donc possible, grâce au système (III. 2. d) d'appliquer la

méthode du pseudo-modèle pour identifier $x_T^*(t)$ à partir de la suite $(x_0, \dots, x_N)$. L'identification peut se faire de deux façons :

- l'application directe de la méthode avec fonction d'entrée impulsionnelle. On obtient alors tous les coefficients a_i et b_j .

- après la prise en compte des h conditions initiales, l'identification s'applique uniquement à l'équation en régime libre (sans second membre) et ne porte que sur les coefficients a_i .

C'est la deuxième façon de procéder qui est retenue ; les points initiaux étant connus, le calcul des b_i est simple dès l'instant où l'on connaît les a_i . Ce calcul n'est d'ailleurs utile qu'à titre indicatif. D'autre part, la mise en oeuvre de la méthode d'identification est simplifiée puisque le nombre de paramètres à déterminer est réduit de moitié.

En effet, on a :

$$x_n^* = - \sum_{i=1}^h \tilde{a}_i \cdot x_{n-i} \quad (\text{III. 2. e})$$

et l'erreur

$$\varepsilon_n = x_n - x_n^*$$

s'écrit :

$$\varepsilon_n = x_n + \tilde{a}_1 \cdot x_{n-1} + \dots + \tilde{a}_h \cdot x_{n-h} \quad (\text{III. 2. f})$$

Le critère à minimiser est donc

$$r = \sum_{n=h}^N \varepsilon_n^2 \quad (\text{III. 2. g})$$

et les éléments de l'algorithme de Gauss-Newton (II. 3. f) sont

$$q = [a_1, \dots, a_h]^T \quad (\text{III. 2. h})$$

$$\text{grad}_q r = 2 \cdot \sum_{n=h}^N \mathcal{E}_n \cdot [x_{n-1}, \dots, x_{n-h}]^T \quad (\text{III. 2. i})$$

$$\Omega = 2 \sum_{n=h}^N \left[\underbrace{x_{n-i} \cdot x_{n-j}}_{i=1, \dots, h} \right] \Bigg\} \quad j = 1, \dots, h \quad (\text{III. 2. j})$$

L'identification est réalisée dès que le critère r devient inférieur à une valeur fixée à priori. On peut d'ailleurs noter que dans l'équation (III. 2. f), l'écart $\mathcal{E}_n$ est identiquement nul si :

$$\tilde{a}_i = a_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq h \quad (\text{III. 2. k})$$

On obtient donc une équation de récurrence d'ordre h permettant de régénérer la suite des x_i à partir de x_h :

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} = 0 \quad (\text{III. 2. l})$$

3) Génération de courbes paramétriques.

Supposons qu'on doive générer dans l'espace une trajectoire paramétrique dont les composantes sont des combinaisons linéaires d'exponentielles de la forme :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{i=1}^{l_x} (d_{ix} e^{-\lambda_{ix} t} \cos \omega_{ix} t + e_{ix} e^{-\lambda_{ix} t} \sin \omega_{ix} t) + \sum_{i=2l_x+1}^{h_x} C_{ix} e^{s_{ix} t} \\
 y(t) &= \sum_{i=1}^{l_y} (d_{iy} e^{-\lambda_{iy} t} \cos \omega_{iy} t + e_{iy} e^{-\lambda_{iy} t} \sin \omega_{iy} t) + \sum_{i=2l_y+1}^{h_y} C_{iy} e^{s_{iy} t} \\
 z(t) &= \sum_{i=1}^{l_z} (d_{iz} e^{-\lambda_{iz} t} \cos \omega_{iz} t + e_{iz} e^{-\lambda_{iz} t} \sin \omega_{iz} t) + \sum_{i=2l_z+1}^{h_z} C_{iz} e^{s_{iz} t}
 \end{aligned}
 \tag{III. 3. a}$$

La génération doit se faire avec une période T sur un intervalle $[0 ; T_{\text{MAX}}]$ tel que

$$T \lll T_{\text{MAX}} \tag{III. 3. b}$$

Générer analytiquement les trois fonctions sur tout l'intervalle $[0 ; T_{\text{MAX}}]$ nécessiterait un temps de calcul important à cause des fonctions exponentielles et trigonométriques. Aussi dans un premier temps on se limite à une génération analytique sur un intervalle réduit $[0 ; 50 T]$ par exemple ; puis on réalise l'identification des fonctions sur cet intervalle afin d'utiliser les récurrences obtenues pour générer $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de T en T sur l'intervalle restant $[50 T ; T_{\text{MAX}}]$. La courbe (III. 3. a) est ainsi générée beaucoup plus rapidement que par calcul des équations (III. 3. a) et avec une très bonne précision dès l'instant où l'identification est correctement réalisée.

Les exemples présentés à la fin de ce chapitre illustrent ce type de génération et montrent qu'une identification portant sur quelques dizaines de points permet d'en générer plusieurs centaines.

4) Représentativité de l'équation récurrente - Analyse des pôles.

Nous allons mettre en évidence la quantité d'informations contenue dans les coefficients a_i et les h conditions initiales d'une récurrence d'ordre h telle que :

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_h x_{n-h} = 0 \quad (\text{III. 4. a})$$

$$n \gg h$$

N. B. : On appellera "éléments" de la récurrence (III. 4. a) les coefficients a_i de cette récurrence ainsi que les h points initiaux nécessaires à sa mise en oeuvre.

L'équation (III. 4. a) se rapporte à la transformée en z de $x_T^*(t)$:

$$X_T(z) = \frac{x_0 z^h + (x_1 + a_1 x_0) z^{h-1} + \dots + (x_{h-1} + a_1 x_{h-2} + \dots + a_{h-1} x_0) z}{z^h + a_1 z^{h-1} + \dots + a_{h-1} z + a_h} \quad (\text{III. 4. b})$$

L'étude des pôles de $X_T(z)$ fournit des renseignements sur les composantes de la fonction $x(t)$ dont dérive $x_T^*(t)$.

Remarque :

Cette étude sera limitée au cas où $X_T(z)$ n'a que des pôles simples.

Le cas des pôles multiples peut être traité de façon aussi

rigoureuse mais ne se présente pratiquement jamais ; en tenir compte reviendrait à alourdir les équations et à compliquer les programmes de mise en oeuvre pour une amélioration pratique très réduite.

Si l'on suppose que $X_T(z)$ possède $2l$ pôles complexes conjugués, ses h pôles sont :

$$\beta_{2j-1} = \rho_j \cdot e^{i\theta_j} \quad , \quad \beta_{2j} = \rho_j \cdot e^{-i\theta_j} \quad j = 1, \dots, l$$

$$\beta_i \quad , \quad i = 2l + 1, \dots, h \quad : \text{ pôles réels}$$

Le dénominateur de $X_T(z)$ peut donc s'écrire :

$$D_T(z) = \prod_{j=1}^l (z^2 - 2z \rho_j \cos \theta_j + \rho_j^2) \cdot \prod_{i=2l+1}^h (z - \beta_i) \quad (\text{III. 4. d})$$

A chaque facteur de $D_T(z)$ correspond une composante de l'expression analytique de x_n . On peut donc former x_n :

$$\begin{aligned} x_n = & \sum_{j=1}^l \left[d_j \cdot \rho_j^n \cos (n \theta_j) + e_j \cdot \rho_j^n \cdot \sin (n \theta_j) \right] \\ & + \sum_{i=2l+1}^h c_i \cdot (\beta_i)^n \end{aligned} \quad (\text{III. 4. e})$$

expression que l'on pouvait obtenir en résolvant l'équation (III. 4. a) par la méthode classique de résolution des équations aux différences.

Pour calculer les h coefficients

$$\begin{aligned} d_j, e_j & \quad j = 1, \dots, l \\ c_i & \quad i = 2l + 1, \dots, h \end{aligned} \quad ,$$

on doit prendre en compte les conditions initiales $(x_0, \dots, x_{h-1})$ et former le système :

$$X = \Gamma \cdot B \quad (\text{III. 4. f})$$

avec

$$X = [x_0; \dots; x_{h-1}]^T$$

$$B = [d_1; e_1; d_2; e_2; \dots; d_2; e_1; c_{21+1}; \dots; c_h]^T$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 \cos \theta_1 & \rho_1 \sin \theta_1 & \dots & \rho_1 \cos \theta_1 & \rho_1 \sin \theta_1 & \dots & \rho_h \\ \rho_1^i \cos(i\theta_1) & \rho_1^i \sin(i\theta_1) & \dots & \rho_1^i \cos(i\theta_1) & \rho_1^i \sin(i\theta_1) & \dots & \rho_h^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1^{h-1} \cos(h-1)\theta_1 & \rho_1^{h-1} \sin(h-1)\theta_1 & \dots & \rho_1^{h-1} \cos(h-1)\theta_1 & \rho_1^{h-1} \sin(h-1)\theta_1 & \dots & \rho_h^{h-1} \\ \beta_{21+1} & \dots & \beta_h \end{bmatrix}$$

La résolution du système (III. 4. f) donne le vecteur B, qui est celui des coefficients d_j , e_j , c_i .

Afin d'obtenir l'expression de $x(t)$, on doit appliquer l'équation (I. 4. f) aux pôles de $X_T(z)$. Nous avons à considérer 3 types de pôles

- Pôles complexes conjugués :

$$\beta_{2j-1} = \rho_j \cdot e^{i\theta_j} = e^{(a_j + ib_j)T}$$

$$\beta_{2j} = \rho_j \cdot e^{-i\theta_j} = e^{(a_j - ib_j)T}$$

Un facteur $(z^2 - 2z \rho_j \cos \theta_j + \rho_j^2)$ s'écrit donc

$(z^2 - 2z \cdot e^{a_j T} \cos b_j T + e^{2a_j T})$ et correspond à un terme fonction du temps de la forme :

$$x_j(t) = d_j \cdot e^{a_j t} \cdot \cos b_j t + e_j \cdot e^{a_j t} \cdot \sin b_j t \quad (\text{III. 4. h})$$

- Pôles réels positifs :

$$\beta_i = e^{s_i T} \quad i > 2l+1 \quad (\text{III. 4. i})$$

Ce qui donne

$$(z - \beta_i) = (z - e^{s_i T}) \quad (\text{III. 4. j})$$

et correspond à un terme tel que

$$x_i(t) = c_i \cdot e^{s_i t} \quad (\text{III. 4. k})$$

- Pôles réels négatifs :

$$\beta_i = -|\beta_i| = -e^{s_i T} \quad (\text{III. 4. l})$$

Ce qui donne

$$(z - \beta_i) = (z + e^{s_i T}) \quad (\text{III. 4. m})$$

Un terme $(z + e^{s_i T})$ au dénominateur d'une transformée en z indique une oscillation cachée. En effet, si on considère une fonction,

$$x_i(t) = c_i e^{s_i t} \cos \omega_i t + \sigma_i e^{s_i t} \sin \omega_i t \quad (\text{III. 4. n}),$$

la transformée en z de cette fonction échantillonnée est :

$$x_i^*(t) = \frac{d_i z^2 + \left[\sigma_i e^{s_i T} \sin(\omega_i T) - c_i e^{s_i T} \cos(\omega_i T) \right] z}{z^2 - 2z e^{s_i T} \cos \omega_i T + e^{2s_i T}}$$

Or avec $\omega_i T = \pi$, on peut vérifier que cette transformée en z devient :

$$x_i^*(t) = \frac{c_i z}{z + e^{s_i T}} \quad (\text{III. 4. p})$$

Il apparaît donc qu'un pôle réel négatif dans $X_T(z)$ indique que la fonction continue $x(t)$ possède une composante de la forme (III. 4. n), avec $\omega_i = \frac{\pi}{T}$. La résolution du système (III. 4. f) ne donne que le coefficient du terme en cosinus puisqu'aux instants nT l'expression (III. 4. n) s'écrit

$$x_i(nT) = x_i\left(n \frac{\pi}{\omega_i}\right) = c_i \cdot (e^{s_i T})^n \cdot \cos n$$

$$x_i(nT) = c_i \cdot (-e^{s_i T})^n \quad (\text{III. 4. q})$$

Le coefficient c_i de (III. 4. q) figure dans l'expression générale de x_n (III. 4. e), affecté au pôle réel $\beta_i = -e^{s_i T}$.

Par contre le système (III. 4. f) ne donne pas accès au coefficient σ_i du terme en sinus de (III. 4. n). Ce coefficient n'apparaît

d'ailleurs pas dans l'expression (III. 4. p) de la transformée en z.

L'échantillonnage en T s'est donc fait avec une perte d'information.

En résumé, si l'on a m pôles réels négatifs, l'analyse de $X_T(z)$ permet de donner à $x(t)$ la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \sum_{j=1}^1 (d_j \cdot e^{a_j t} \cos b_j t + e_j \cdot e^{a_j t} \sin b_j t) \\
 & + \sum_{i=2l+1}^{2l+m} \left[c_i \cdot e^{s_i t} \cos \left(\frac{\eta}{T} t \right) + \sigma_i \cdot e^{s_i t} \sin \left(\frac{\eta}{T} t \right) \right] \quad (\text{III. 4. q}) \\
 & + \sum_{i=2l+m+1}^h c_i e^{s_i t}
 \end{aligned}$$

mais les coefficients des termes en $\sin \left(\frac{\eta}{T} t \right)$ demeurent inconnus.

5) Détermination d'une récurrence interpolatrice.

L'analyse des éléments de (III. 4. a) va nous servir à résoudre un nouveau problème : connaissant la relation (III. 4. a) relative à la période T, on vient trouver les éléments d'une équation de récurrence relative à la période $T' = \frac{T}{k}$, qui permettra d'interpoler la courbe entre les points connus $(x_0, \dots, x_N)$.

On notera "prime" tous les éléments relatifs à la nouvelle période T'.

Il faut donc trouver une relation de récurrence

$$x'_n + a'_1 \cdot x'_{n-1} + \dots + a'_{h'} \cdot x'_{n-h'} = 0 \quad (\text{III. 5. a})$$

pour $n > h'$

qui permette de générer la courbe $x^*_T(t)$ à la période T' , avec bien entendu la condition

$$x'_{nk} = x_n \quad \forall n \in [0 ; N] \quad (\text{III. 5; b})$$

Les deux fonctions échantillonnées $x^*_T(t)$ et $x^*_{T'}(t)$ proviennent de la même fonction continue $x(t)$ (III. 4. q). En appliquant la relation (I. 4. f) à chacune d'elles, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta_i &= e^{s_i T} \\ \beta'_i &= e^{s_i T'} = e^{s_i \frac{T}{k}} \end{aligned} \quad \beta_i, s_i$$

d'où

$$\beta'_i = \beta_i^{1/k} \quad (\text{III. 5. c})$$

Hypothèse :

D'après le paragraphe précédent, l'analyse des éléments de l'équation (III. 4. a) ne donne pas accès aux coefficients σ_i de $x(t)$ (III. 4. q). Dans un premier temps, ces coefficients seront négligés et fixés arbitrairement nuls. Cette question sera traitée dans un prochain paragraphe.

On va donc développer la relation (III. 5. c) pour les différents types de pôles afin d'établir la correspondance entre les dénominateurs $D_T(z)$ et $D_{T'}(z)$ des fonctions $x_T^*(t)$ et $x_{T'}^*(t)$.

On a :

$$D_T(z) = \prod_{j=1}^l (z^2 - 2z \cdot \rho_j \cdot \cos \theta_j + \rho_j^2) \cdot \prod_{i=2l+1}^{2l+m} (z + |\beta_i|) \cdot \prod_{i=2l+m+1}^h (z - \beta_i)$$

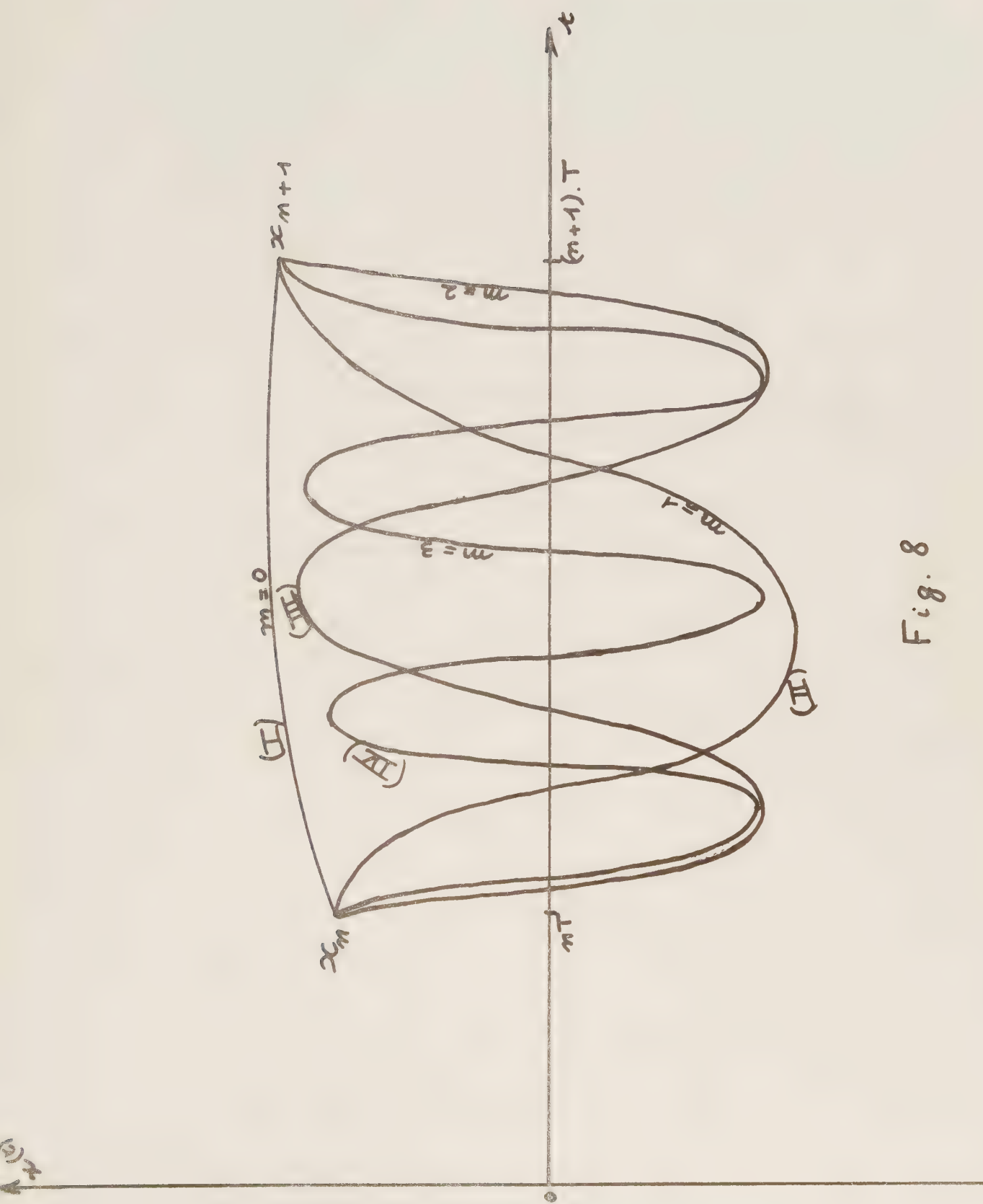
Etudions chaque type de facteur :

- Pôles complexes conjugués.

$$\begin{array}{ccc} \text{en } T & & \text{en } T' \\ \beta_i = \rho_j \cdot e^{i\theta_j} & \longrightarrow & \beta_i' = \rho_j^{1/k} \cdot e^{i \frac{\theta_j}{k}} \\ \beta_{i+1} = \rho_j \cdot e^{-i\theta_j} & \longrightarrow & \beta_{i+1}' = \rho_j^{1/k} \cdot e^{-i \frac{\theta_j}{k}} \quad (\text{III. 5. e}) \\ z^2 - 2z \cdot \rho_j \cdot \cos \theta_j + \rho_j^2 & \longrightarrow & z^2 - 2 \cdot z \cdot \rho_j^{1/k} \cdot \cos \frac{\theta_j}{k} + \rho_j^{2/k} \end{array}$$

Remarque:

On sait que tout nombre complexe $\rho \cdot e^{i\theta}$ possède k racines



$k^{\text{ièmes}}$ de module $\frac{1}{k}$ et d'argument $(\frac{\theta}{k} + \frac{2m\pi}{k})$, m variant de 0 à $(k-1)$. Dans la correspondance qui est établie entre les pôles, on fixe implicitement $m=0$. Ce choix correspond à celui de l'harmonique fondamental. La figure 3 illustre ce choix : pour interpoler la courbe entre deux points x_n et x_{n+1} , on choisit la trajectoire la plus directe (I), qui présente le moins de variations entre x_n et x_{n+1} . Les courbes (II), (III) et (IV) correspondent à des arguments

$$(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k}), (\frac{\theta}{k} + \frac{4\pi}{k}), (\frac{\theta}{k} + \frac{6\pi}{k}) \text{ respectivement.}$$

Cette remarque s'applique d'ailleurs à tous les pôles dès l'instant où l'on considère qu'ils appartiennent au plan complexe.

- Pôles réels positifs.

$$\begin{array}{ccc} \text{en T} & & \text{en T'} \\ \beta_i & \xrightarrow{\circ} & \beta'_i = \beta_i \cdot \frac{1}{k} \\ (z - \beta_i) & \xrightarrow{\circ} & (z - \beta_i \cdot \frac{1}{k}) \end{array} \quad (\text{III. 5. f})$$

- Pôles réels négatifs.

$$\begin{array}{ccc} \text{en T} & & \text{en T'} \\ \beta_i \left| \begin{array}{l} \beta_{i+} = |\beta_i| \cdot e^{j\pi} \\ \beta_{i-} = |\beta_i| \cdot e^{-j\pi} \end{array} \right. & \xrightarrow{\circ} & \beta'_{i+} = |\beta_i| \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{j\frac{\pi}{k}} \\ & & \beta'_{i-} = |\beta_i| \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-j\frac{\pi}{k}} \\ (z + |\beta_i|) & \xrightarrow{\circ} & z^2 - 2z \cdot |\beta_i| \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos \frac{\pi}{k} + |\beta_i| \cdot \frac{1}{k^2} \end{array} \quad (\text{III. 5. g})$$

A l'aide de toutes ces transformations, (III. 5. e), (III. 5. f) et (III. 5. g), on peut former le dénominateur $D_{T'}(z)$ de la transformée en z de $x_{T'}^*(t)$:

$$D_{T'}(z) = \prod_{j=1}^1 (z^2 - 2z \cdot \rho_j^{\frac{1}{k}} \cdot \cos \frac{\theta_j}{k} + \rho_j^{\frac{2}{k}}) \quad (\text{III. 5. h})$$

$$\prod_{j=2l+m+1}^{2l+m} (z^2 - 2z \cdot |\beta_i|^{\frac{1}{k}} \cdot \cos \frac{\pi}{k} + |\beta_i|^{\frac{2}{k}}) \cdot \prod_{i=2l+m+1}^h (z - \beta_i^{\frac{1}{k}})$$

On remarque que chaque pôle β_i négatif augmente l'ordre de $D_{T'}(z)$ par rapport à $D_T(z)$. Par conséquent, on a :

$$h' = h + m \quad (\text{III. 5. i})$$

Les coefficients de $D_{T'}(z)$ permettent d'écrire la récurrence interpolatrice (III. 5. a) :

$$x'_n + a'_1 \cdot x'_{n-1} + \dots + a'_h \cdot x'_{n-h'} = 0 \quad n \geq h'$$

Il reste à initialiser cette équation. A la suite de l'analyse des pôles de $X_T(z)$ et des conditions initiales en T , on peut former l'expression analytique de $x(t)$ (III. 4. q). En négligeant les termes en $\sin \frac{\pi}{T} t$, comme nous l'avons décidé, on en déduit l'expression analytique de tout x'_n :

$$\begin{aligned}
 x'_n = & \sum_{j=1}^1 \left(d_j \cdot \rho_j^{\frac{n}{k}} \cdot \cos \frac{n \theta_j}{k} + e_j \cdot \rho_j^{\frac{n}{k}} \cdot \sin \frac{n \theta_j}{k} \right) \\
 & + \sum_{i=2l+1}^{2l+m} c_i \cdot \left| \beta_j \right|^{\frac{n}{k}} \cdot \cos \frac{n \pi}{k} + \sum_{i=2l+m+1}^h c_i \cdot \beta_i^{\frac{n}{k}}
 \end{aligned}
 \tag{III. 5. j}$$

Grâce à l'équation (III. 5. j), on peut réaliser l'initialisation de la récurrence interpolatrice de 0 à $(h'-1) \cdot T'$. On génère ensuite $x_{T'}^*(t)$ par la relation (III. 5. a).

Remarque :

Le principe d'interpolation d'une fonction du temps peut bien entendu être appliqué à plusieurs axes, comme on le verra dans les exemples présentés à la fin de ce chapitre. La synchronisation de 2 ou 3 récurrences du type (III. 5. a) permet d'interpoler des courbes en 2 ou 3 dimensions.

6) Etude qualitative de l'erreur de chute dans la génération par récurrence.

En pratique, le déroulement d'une équation de récurrence telle que (III. 4. a) ou (III. 5. a) est générateur d'une erreur de chute due d'une part à la précision sur les coefficients a_i , d'autre part à la troncature que l'on est obligé d'opérer sur les points x_n . L'erreur sur les coefficients est négligeable si l'identification de la courbe a été réalisée dans de bonnes conditions. De plus, elle n'est pas cumulative. Nous considérerons donc uniquement l'erreur de chute sur les points calculés.

Chaque point calculé x_n subit une troncature de caractère aléatoire, et que l'on peut majorer par une valeur $\overline{\epsilon}$. Dans un registre binaire, cette erreur est toujours retranchée, quel que soit le signe de x_n [10]. On possède donc une valeur

$$\tilde{x}_n = x_n - \delta_n \quad (\text{III. 6. a})$$

avec
$$0 \leq \delta_n \leq \overline{\epsilon} \quad (\text{III. 6. b})$$

La récurrence (III. 4. a) porte en réalité sur les x_n ; on a par conséquent :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n = x_n - \delta_n &= - \sum_{i=1}^h a_i \cdot \tilde{x}_{n-i} \\ x_n - \delta_n &= - \sum_{i=1}^h a_i \cdot (x_{n-i} - \delta_{n-i}) \end{aligned} \quad (\text{III. 6. c})$$

d'où

$$\delta_n = -a_1 \cdot \delta_{n-1} - \dots - a_h \cdot \delta_{n-h} \quad (\text{III. 6. d})$$

On généralise ainsi à l'ordre h un résultat démontré [10] à l'ordre 2 : l'erreur obéit à la même loi de récurrence que la fonction que l'on génère, avec des conditions initiales aléatoires. Nous n'approfondirons pas l'étude du phénomène car l'expérience montre que l'erreur de chute ne provoque généralement pas de divergence importante entre la courbe générée par récurrence et la courbe analytique.

Néanmoins, il arrive que dans une interpolation, la courbe générée par la récurrence interpolatrice diverge par rapport à la courbe repérée par les points connus $(x_0, \dots, x_N)$. Ce cas doit donc être étudié plus en détail.

7) Divergence entre $x_T^*(t)$ et $x_{T'}^*(t)$ lors de l'interpolation.

On a vu que dans le cas où $X_T(z)$ possède des pôles réels négatifs, il fallait fixer les coefficients σ_i ($i \in [2l+1, 2l+m]$) de $x(t)$ (III. 4. q) arbitrairement nuls. Ce choix a évidemment une influence sur l'initialisation de la récurrence interpolatrice (III. 5. a) et ses conséquences se répercutent sur toute la courbe générée. Ces conséquences sont bien entendu d'autant plus importantes que les coefficients négligés sont plus grands. Il en résulte une mauvaise précision dans l'interpolation, voire une divergence de la fonction générée $x_{T'}^*(t)$ par rapport à la fonction de référence $x_T^*(t)$.

Les écarts $(x_n - x_{kn}')$ aux points de repère $(x_0, \dots, x_N)$ sont les seules conséquences mesurables de l'erreur commise sur la détermination de $x(t)$. Ce sont ces écarts qui doivent servir à calculer les coefficients σ_i qui figurent effectivement dans l'équation (III. 4. q).

Si m est le nombre de pôles réels négatifs, l'erreur commise sur les points initiaux s'écrit, en posant $p = i - 2l$ pour faciliter les écritures,

$$\delta_0 = x(0) - x'_0 = 0$$

$$\delta_1 = x(T') - x'_1 = \sum_{p=1}^m \sigma_p \cdot (-\beta_p)^{\frac{1}{k}} \cdot \sin \frac{\pi}{k}$$

(III. 7. a)

$$\delta_j = x(jT') - x'_j = \sum_{p=1}^m \sigma_p \cdot (-\beta_p)^{\frac{j}{k}} \cdot \sin \frac{j\pi}{k}$$

$$\delta_{h'-1} = x[(h' - 1) \cdot T'] - x'_{h'-1} = \sum_{p=1}^m \sigma_p \cdot (-\beta_p)^{\frac{h'-1}{k}} \cdot \sin \frac{(h'-1)\pi}{k}$$

Pour $n \gg h'$, l'erreur suit la loi de récurrence

$$\delta_n = - \sum_{i=1}^{h'} a'_i \cdot \delta_{n-i} \quad (\text{III. 7. b})$$

Plus précisément, tous les facteurs des σ_p suivent cette loi ; l'erreur globale δ_n n'est que la somme de m erreurs élémentaires, toutes générées par la même récurrence, et pondérées par les coefficients σ_p .

Par conséquent, si l'on nomme γ_p^n le facteur de σ_p à l'instant n , on peut générer tous les γ_p^n de la façon suivante :

$$\gamma_p^n = (-\beta_p)^{\frac{n}{k}} \cdot \sin \frac{n\pi}{k} \quad \text{pour } n \leq h'-1$$

(III. 7. c)

$$\gamma_p^n = - \sum_{i=1}^{h'} a'_i \cdot \gamma_p^{n-i} \quad \text{pour } n \gg h'$$

L'erreur δ_n s'écrit alors :

$$\delta_n = \sum_{p=1}^m \sigma_p \cdot \gamma_p^n \quad (\text{III. 7. d})$$

Or, on calcule aisément les écarts entre $x_{T'}^*(t)$ et $x_T^*(t)$ aux points de repère, c'est-à-dire les δ_{nk} , pour n variant de 0 à N . A l'aide des m premiers, on construit un système linéaire de m équations :

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \sigma_1 \cdot \gamma_1^1 + \dots + \sigma_j \cdot \gamma_j^1 + \dots + \sigma_m \cdot \gamma_m^1 \\ \delta_{2k} &= \sigma_1 \cdot \gamma_1^2 + \dots + \sigma_j \cdot \gamma_j^2 + \dots + \sigma_m \cdot \gamma_m^2 \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{pk} &= \sigma_1 \cdot \gamma_1^p + \dots + \sigma_j \cdot \gamma_j^p + \dots + \sigma_m \cdot \gamma_m^p \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{mk} &= \sigma_1 \cdot \gamma_1^m + \dots + \sigma_j \cdot \gamma_j^m + \dots + \sigma_m \cdot \gamma_m^m \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 7. e})$$

La résolution de ce système fournit les coefficients σ_p . On peut donc rectifier l'initialisation de la récurrence interpolatrice et générer la fonction $x_{T'}^*(t)$ réellement associée à $x(t)$. L'interpolation est ainsi améliorée.

Remarques.

- Dans la prise en compte de $(\delta_k, \dots, \delta_{mk})$, les erreurs de principe et de chute ne se distinguent pas. Lorsque la divergence est très nette, on peut supposer que l'erreur de principe est prépondérante ; il arrive en effet que la précision obtenue aux points $(x_0, \dots, x_N)$ lors de la première interpolation soit satisfaisante : dans ces conditions, le calcul des σ_p ne se justifie pas.

- En pratique, l'ordre h choisi pour la récurrence en T n'est jamais très élevé ($h \leq 7$), afin d'éviter une erreur de chute trop importante ; par suite le nombre m de pôles négatifs est sinon nul, du moins réduit. Le système (III. 7. e) est alors nettement simplifié et aisément résoluble.

- Un autre facteur important dans la phase d'interpolation est le choix des points relevés sur la courbe à identifier et interpoler $(x_0, \dots, x_N)$ qui contiennent toute l'information.

8) Equation de récurrence en cotation relative.

La formulation récurrente (III. 4. a) implique que chaque point de la trajectoire générée est repéré par rapport à une origine fixe. On est alors en cotation absolue.

Or, très souvent en Commande Numérique, on préfère définir

un point par rapport à celui qui le précède ; on travaille alors en notation relative ou "incrémentale".

Afin de faciliter la génération des trajectoires d'outil en notation relative, on peut modifier les récurrences de façon à exprimer le déplacement de l'outil en fonction des déplacements précédents.

Posons donc :

$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} \quad (\text{III. 8. a})$$

Une récurrence du type (III. 4. a) se transforme de la façon suivante :

$$x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \dots + a_h \cdot x_{n-h} = 0$$

$$(x_n - x_{n-1}) + (1+a_1) \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \dots + a_h \cdot x_{n-h} = 0$$

$$(x_n - x_{n-1}) + (1+a_1) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + (1+a_1+a_2)x_{n-2} + \dots + a_h \cdot x_{n-h} = 0$$

et ainsi de suite, ce qui donne finalement :

$$\Delta x_{n-1} + (1+a_1) \cdot \Delta x_{n-2} + (1+a_1+a_2) \cdot \Delta x_{n-3} + \dots \quad (\text{III. 8. b})$$

$$\dots + (1+a_1+\dots+a_{h-1}) \cdot \Delta x_{n-h} + (1+a_1+\dots+a_h) \cdot x_{n-h} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta x_{n-1} + \alpha_1 \cdot \Delta x_{n-2} + \dots + \alpha_{h-1} \cdot \Delta x_{n-h} + \alpha_h \cdot x_{n-h} = 0 \quad (\text{III. 8. c})$$

Fig. 9

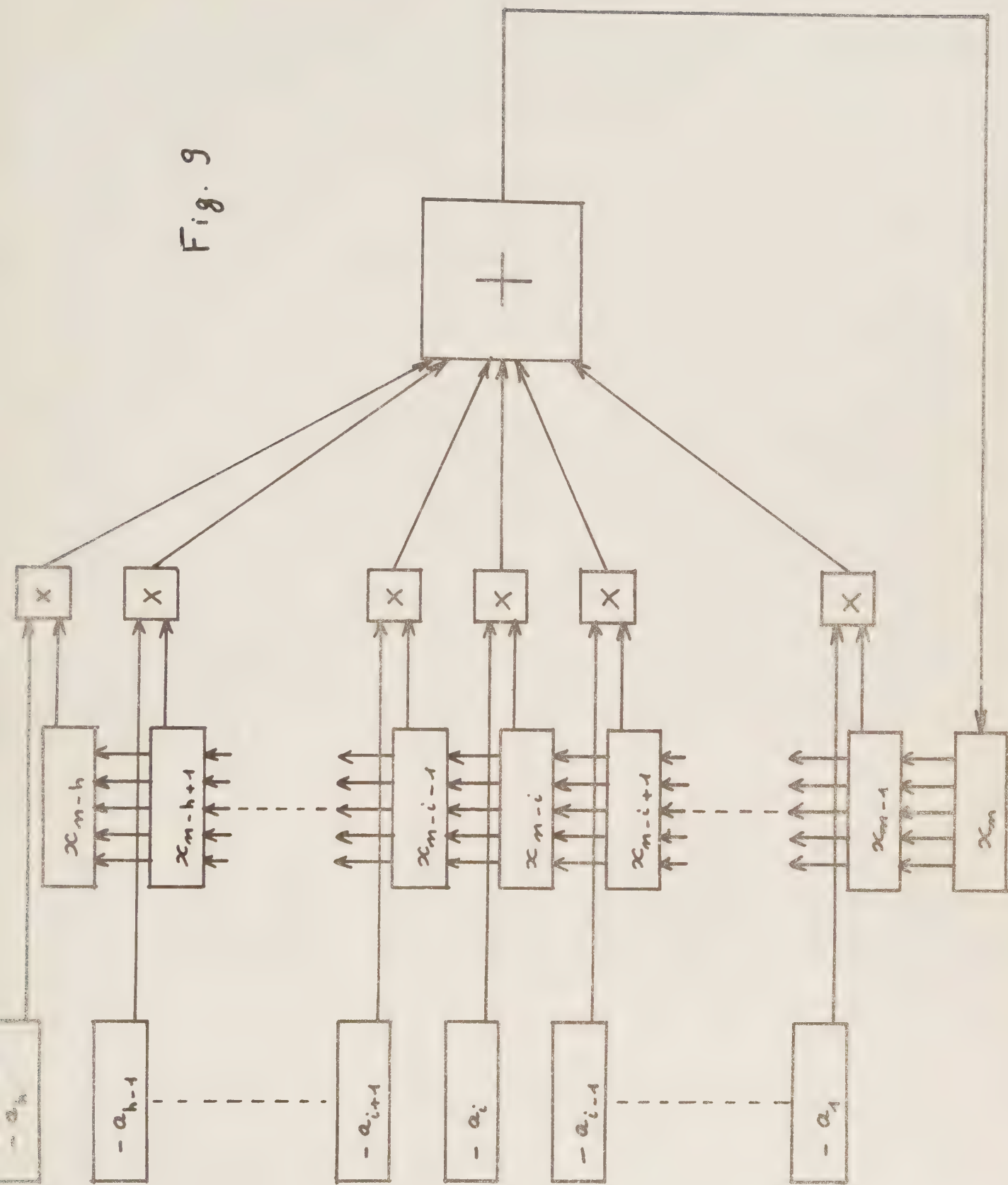
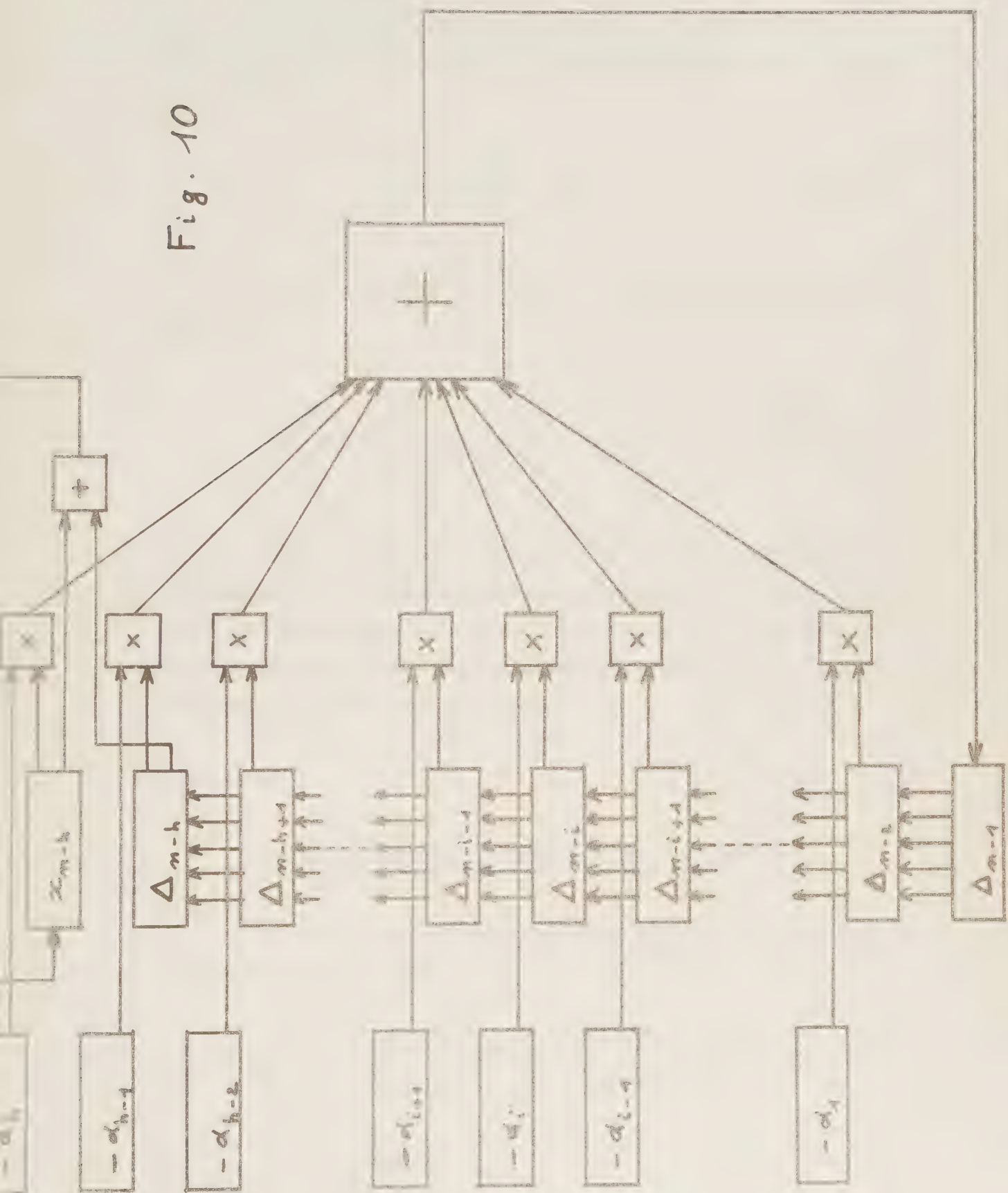


Fig. 10



Les coefficients α_i de l'équation en cotation relative s'expriment ainsi en fonction des a_i de l'équation en cotation absolue

$$\alpha_i = 1 + \sum_{j=1}^i a_j \quad (\text{III. 8. d})$$

Inversement, les a_i s'expriment de façon simple en fonction des α_i :

$$a_i = \alpha_i - \alpha_{i-1} \quad (\text{III. 8. e})$$

Ces 2 transformations simples permettent de générer une courbe par récurrence indifféremment en cotation absolue ou relative. Les figures 9 et 10 montrent les synoptiques de ces deux types de génération et constituent les schémas de base pour la réalisation éventuelle d'un interpolateur câblé.

9) Interpolation par la transformée en z décalée.

Une autre méthode d'interpolation par récurrence utilise la transformée en z décalée.

Une fois la courbe identifiée à la période T, on possède une relation de récurrence (III. 4. a) , initialisée par les points

$$x_0 = x(0)$$

$$x_1 = x(T)$$

$$x_{h-1} = x \quad (h-1) T \quad , \text{ qui permettent de déterminer}$$

- Sa mise en oeuvre nécessite le calcul de $h \times k$ conditions initiales au lieu de $h' = h+m$ pour la récurrence interpolatrice.

- Le fait qu'il ne soit pas nécessaire de calculer la récurrence interpolatrice (III. 5. a) ne simplifie en rien l'interpolation puisque le calcul des conditions initiales nécessite de toutes façons le calcul et l'analyse des pôles de $X_T(z)$.

- Le calcul des points de $x_{T'}^*(t)$ par transformée en z décalée nécessite l'application de la même récurrence à k reprises, et de surcroît, si l'on veut les obtenir dans l'ordre naturel (de T' en T'), il faut conserver en mémoire de façon permanente h coefficients a_i et $h \times k$ valeurs, au lieu de h' coefficients a_i' et h' valeurs pour la récurrence interpolatrice.

10) Exemples d'application - Interprétation.

a) Identification.

Diverses fonctions du temps, vérifiant les hypothèses posées au début du chapitre, ont été identifiées par la méthode du pseudo-modèle. Les coefficients du numérateur des transformées en z des différentes fonctions sont calculés à partir des conditions initiales et des coefficients du dénominateur.

Les fonctions identifiées ici sont les réponses de quelques uns des systèmes identifiés au chapitre précédent.

. $x(t) = 1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$ est la réponse indicielle du système

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

Elle est identifiée à la période $T = 0,1$ et sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
On obtient la transformée en z :

$$X(z) = \frac{0,009349 \cdot z^{-1} + 0,008746 \cdot z^{-2}}{1 - 2,8006340 \cdot z^{-1} + 2,6193648 \cdot z^{-2} - 0,81873078 \cdot z^{-3}}$$

au bout de 3 itérations. La planche I montre l'identification obtenue au cours de la dernière itération.

. On a identifié la réponse du système

$$H(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+6s)} \quad \text{au signal d'entrée}$$

composé successivement d'un échelon, d'une rampe et d'une exponentielle décroissante.

La fonction $x(t)$ évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 0,5 e^{-\frac{t}{2}} - 1,5 \cdot e^{-\frac{t}{6}} && \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ x_2(t) &= x_1(t) + t-9 - e^{-\left(\frac{t-1}{2}\right)} + 9 \cdot e^{-\left(\frac{t-1}{6}\right)} && \text{pour } 1 \leq t \leq 3 \\ x_3(t) &= x_2(t) - t+8 + 0,6 \cdot e^{-(t-3)} - 2 \cdot e^{-\frac{t-3}{2}} + 3,6 \cdot e^{-\frac{t-3}{6}} && \text{pour } 3 \leq t \end{aligned}$$

PLANCHE I

0E POINT = -0.000000
 1E POINT = 0.009349
 2E POINT = 0.034932

TEMPS	VALEUR REELLE	VALEUR CALCULEE
0.30	0.073342	0.073342
0.40	0.121559	0.121559
0.50	0.176932	0.176932
0.60	0.237163	0.237163
0.70	0.300281	0.300281
0.80	0.364620	0.364620
0.89	0.428795	0.428795
1.00	0.491674	0.491674
1.10	0.552353	0.552353
1.20	0.610135	0.610135
1.30	0.664497	0.664497
1.40	0.715077	0.715077
1.50	0.761645	0.761645
1.60	0.804084	0.804084
1.70	0.842376	0.842376
1.79	0.876580	0.876580
1.90	0.906817	0.906817
2.00	0.933259	0.933259
2.10	0.956116	0.956116
2.20	0.975623	0.975623
2.30	0.992036	0.992036
2.40	1.005618	1.005618
2.50	1.016636	1.016636
2.60	1.025356	1.025356
2.70	1.032036	1.032036
2.80	1.036925	1.036925
2.90	1.040260	1.040260
3.00	1.042262	1.042262
3.10	1.043137	1.043137
3.20	1.043072	1.043072
3.30	1.042239	1.042239
3.40	1.040793	1.040793
3.50	1.038871	1.038871
3.59	1.036594	1.036594
3.70	1.034067	1.034067
3.80	1.031382	1.031382
3.90	1.028615	1.028615
4.00	1.025833	1.025833
4.10	1.023087	1.023087
4.20	1.020421	1.020421
4.30	1.017869	1.017869
4.40	1.015456	1.015456
4.50	1.013201	1.013201
4.60	1.011115	1.011115
4.70	1.009207	1.009207
4.80	1.007478	1.007478
4.90	1.005927	1.005927
5.00	1.004549	1.004549

CRITERE QUADRATIQUE = 0.17E-15

L'identification s'effectue à la période $T = 0,05$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

On obtient :

$$X(z) = \frac{0,000103 \cdot z^{-1} + 0,000099 \cdot z^{-2}}{1 - 2,9946307 \cdot z^{-1} + 2,9880096 \cdot z^{-2} - 0,99330271 \cdot z^{-3}}$$

pour un critère quadratique $r = 0,58 \cdot 10^{-8}$. Cette valeur a été atteinte dès la quatrième itération, mais le processus a été poursuivi afin d'obtenir une meilleure précision sur les coefficients. Les planches (II) et (II bis) montrent le détail de la quatrième itération.

. La fonction

$$x(t) = 20 e^{-t} - 50 e^{-\frac{t}{2}} + 30 e^{-\frac{t}{6}}$$

a été ensuite identifiée à la période $T = 0,1$, sur l'intervalle $[0 ; 5]$. C'est la réponse du système

$$H(s) = \frac{100}{(1+2s)(1+6s)}$$

au signal $e(t) = e^{-t} \cdot u(t)$. On constatera que le gain ne perturbe pas le déroulement de l'identification.

Après 4 itérations, on exprime la transformée en z sous la forme

$$X(z) = \frac{0,039420 \cdot z^{-1} + 0,037290 \cdot z^{-2}}{1 - 2,8395387 \cdot z^{-1} + 2,6860976 \cdot z^{-2} - 0,84648216 \cdot z^{-3}}$$

PLANCHE II

0E POINT = 0.000000
 1E POINT = 0.000103
 2E POINT = 0.000407
 VALEUR REELLE

TEMPS

VALEUR CALCULEE

0.15	0.000906	0.000911
0.20	0.001594	0.001599
0.25	0.002464	0.002469
0.30	0.003509	0.003515
0.35	0.004725	0.004730
0.40	0.006104	0.006110
0.44	0.007642	0.007648
0.50	0.009333	0.009339
0.55	0.011172	0.011178
0.60	0.013152	0.013158
0.65	0.015271	0.015276
0.70	0.017521	0.017527
0.75	0.019899	0.019905
0.80	0.022400	0.022405
0.85	0.025019	0.025024
0.89	0.027752	0.027757
0.95	0.030594	0.030600
1.00	0.033542	0.033547
1.05	0.036593	0.036597
1.10	0.039752	0.039749
1.15	0.043025	0.043019
1.20	0.046417	0.046411
1.25	0.049934	0.049929
1.30	0.053582	0.053577
1.35	0.057365	0.057360
1.40	0.061290	0.061285
1.45	0.065360	0.065355
1.50	0.069581	0.069576
1.55	0.073956	0.073951
1.60	0.078490	0.078485
1.65	0.083187	0.083183
1.70	0.088052	0.088047
1.75	0.093087	0.093082
1.79	0.098297	0.098292
1.85	0.103684	0.103680
1.90	0.109253	0.109248
1.95	0.115007	0.115002
2.00	0.120947	0.120942
2.05	0.127078	0.127073
2.10	0.133402	0.133397
2.15	0.139922	0.139916
2.20	0.146639	0.146634
2.25	0.153558	0.153552
2.30	0.160679	0.160673
2.35	0.168004	0.167999
2.40	0.175537	0.175531
2.45	0.183279	0.183273
2.50	0.191231	0.191225
2.55	0.199396	0.199390
2.60	0.207775	0.207768
2.65	0.216369	0.216362
2.70	0.225180	0.225173
2.75	0.234210	0.234202
2.80	0.243459	0.243451

PLANCHE II bis

2.85	0.252928	0.252920
2.90	0.262619	0.262611
2.95	0.272533	0.272524
3.00	0.282671	0.282662
3.05	0.293026	0.293023
3.10	0.303567	0.303569
3.15	0.314255	0.314282
3.20	0.325059	0.325083
3.25	0.335944	0.335966
3.30	0.346883	0.346902
3.34	0.357847	0.357864
3.40	0.368812	0.368826
3.45	0.379754	0.379765
3.50	0.390652	0.390660
3.55	0.401484	0.401490
3.59	0.412235	0.412238
3.65	0.422885	0.422886
3.70	0.433421	0.433420
3.75	0.443828	0.443824
3.80	0.454093	0.454087
3.84	0.464204	0.464197
3.90	0.474152	0.474143
3.95	0.483927	0.483915
4.00	0.493519	0.493506

CRITERE QUADRATIQUE = 0.58E-08

VECTEUR SOLUTION

0.27802233E-02
-0.57650051E-02
0.29907209E-02

COEF RECURRENCE

-0.29942662E 01
0.29872537E 01
-0.99291058E 00

PLANCHE III

0E POINT = -0.000000
 1E POINT = 0.039420
 2E POINT = 0.149227

TEMPS	VALEUR REELLE	VALEUR CALCULEE
0.30	0.317848	0.317848
0.40	0.535072	0.535072
0.50	0.791906	0.791906
0.60	1.080444	1.080444
0.70	1.393754	1.393754
0.80	1.725776	1.725776
0.89	2.071224	2.071224
1.00	2.425507	2.425507
1.10	2.784649	2.784649
1.20	3.145224	3.145224
1.30	3.504296	3.504296
1.40	3.859361	3.859360
1.50	4.208299	4.208299
1.60	4.549332	4.549332
1.70	4.880983	4.880983
1.79	5.202041	5.202041
1.90	5.511528	5.511528
2.00	5.808672	5.808672
2.10	6.092883	6.092883
2.20	6.363727	6.363727
2.30	6.620908	6.620908
2.40	6.864249	6.864249
2.50	7.093678	7.093678
2.60	7.309212	7.309212
2.70	7.510941	7.510941
2.80	7.699025	7.699025
2.90	7.873676	7.873676
3.00	8.035153	8.035153
3.10	8.183753	8.183753
3.20	8.319804	8.319804
3.30	8.443662	8.443662
3.40	8.555699	8.555699
3.50	8.656304	8.656304
3.59	8.745879	8.745879
3.70	8.824829	8.824829
3.80	8.893567	8.893568
3.90	8.952507	8.952507
4.00	9.002062	9.002062
4.10	9.042640	9.042640
4.20	9.074649	9.074649
4.30	9.098487	9.098487
4.40	9.114547	9.114547
4.50	9.123215	9.123215
4.60	9.124865	9.124865
4.70	9.119863	9.119863
4.80	9.108566	9.108566
4.90	9.091318	9.091318
5.00	9.068455	9.068455

CRITERE QUADRATIQUE = 0.16E-12

L'incertitude sur les coefficients porte sur la 8ème décimale et l'identification est réalisée avec un critère $r = 0,12 \cdot 10^{-16}$. La planche III montre que la fonction est reproduite sur tout l'intervalle à 6 décimales près.

Pour donner un exemple d'identification délicate, nous avons choisi la réponse du système

$$H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+0,2)(s+5)}$$

au signal d'entrée $e(t) = \sin \frac{t}{2}$. L'expression analytique de la sortie $x(t)$ est

$$x(t) = A e^{-t} + B e^{-0,2t} + C e^{-5t} + E \sin \frac{t}{2}$$

avec

$$A = -2,5$$

$$B = \frac{10}{0,8 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 0,29}$$

$$C = \frac{1}{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 1}$$

$$E = \frac{10}{14,4} + \frac{1,25}{1,2} + \frac{1,25}{6}$$

$$E = 10 - 0,25 A - 1,25 B - 0,05 C$$

La période d'échantillonnage est $T = 0,1$, l'intervalle d'identification $[0 ; 5]$.

Un premier essai a été tenté avec une récurrence d'ordre 3. On obtient (planche IV) une identification approximative, avec en général

PLANCHE IV

0E POINT = 0.000000
 1E POINT = 0.000036
 2E POINT = 0.000526

TEMPS	VALEUR REELLE	VALEUR CALCULEE
0.30	0.002384	0.001512
0.40	0.006779	0.005745
0.50	0.014951	0.013945
0.60	0.028116	0.027235
0.70	0.047406	0.046692
0.80	0.073847	0.073307
0.89	0.108337	0.107965
1.00	0.151650	0.151429
1.10	0.204434	0.204343
1.20	0.267215	0.267232
1.30	0.340405	0.340508
1.40	0.424306	0.424475
1.50	0.519119	0.519335
1.60	0.624949	0.625197
1.70	0.741812	0.742077
1.79	0.869642	0.869912
1.90	1.008296	1.008561
2.00	1.157558	1.157810
2.10	1.317149	1.317380
2.20	1.486727	1.486931
2.30	1.665892	1.666066
2.40	1.854196	1.854337
2.50	2.051139	2.051245
2.60	2.256182	2.256252
2.70	2.468742	2.468776
2.80	2.688203	2.688203
2.90	2.913917	2.913883
3.00	3.145204	3.145140
3.10	3.381363	3.381271
3.20	3.621668	3.621551
3.30	3.865376	3.865238
3.40	4.111725	4.111572
3.50	4.359946	4.359780
3.59	4.609253	4.609081
3.70	4.858860	4.858685
3.80	5.107971	5.107800
3.90	5.355792	5.355630
4.00	5.601527	5.601381
4.10	5.844392	5.844263
4.20	6.083596	6.083493
4.30	6.318366	6.318294
4.40	6.547937	6.547901
4.50	6.771557	6.771563
4.60	6.988490	6.988544
4.70	7.198018	7.198123
4.80	7.399441	7.399606
4.90	7.592081	7.592309
5.00	7.775284	7.775580

CRITERE QUADRATIQUE = 0.56E-05

PLANCHE ~~DE~~ ~~12~~ ~~13~~

0E POINT = 0.000000
 1E POINT = 0.000036
 2E POINT = 0.000526
 3E POINT = 0.002384

VALEUR REELLE

VALEUR CALCULEE

TEMPS

0.40	0.006779	0.006548
0.50	0.014951	0.014888
0.60	0.028116	0.028137
0.70	0.047406	0.047464
0.80	0.073847	0.073914
0.89	0.108337	0.108400
1.00	0.151650	0.151702
1.10	0.204434	0.204472
1.20	0.267215	0.267239
1.30	0.340405	0.340416
1.40	0.424306	0.424306
1.50	0.519119	0.519110
1.60	0.624949	0.624933
1.70	0.741812	0.741791
1.79	0.869642	0.869617
1.90	1.008296	1.008269
2.00	1.157558	1.157532
2.10	1.317149	1.317123
2.20	1.486727	1.486702
2.30	1.665892	1.665870
2.40	1.854196	1.854176
2.50	2.051139	2.051123
2.60	2.256182	2.256169
2.70	2.468742	2.468733
2.80	2.688203	2.688199
2.90	2.913917	2.913916
3.00	3.145204	3.145207
3.10	3.381363	3.381369
3.20	3.621668	3.621677
3.30	3.865376	3.865387
3.40	4.111725	4.111740
3.50	4.359946	4.359961
3.59	4.609253	4.609271
3.70	4.858860	4.858877
3.80	5.107971	5.107989
3.90	5.355792	5.355810
4.00	5.601529	5.601546
4.10	5.844392	5.844406
4.20	6.083596	6.083608
4.30	6.318366	6.318375
4.40	6.547937	6.547942
4.50	6.771557	6.771558
4.60	6.988490	6.988486
4.70	7.198018	7.198008
4.80	7.399441	7.399425
4.90	7.592081	7.592058
5.00	7.775284	7.775254

CRITERE QUADRATIQUE = 0.84E-07

3 décimales exactes. Les coefficients a_i de la récurrence sont :

$$a_1 = -3,1005130$$

$$a_2 = 3,2113416$$

$$a_3 = -1,1111901$$

On a ensuite augmenté de 1 l'ordre de la récurrence. A l'ordre 4, le critère r se stabilise à la valeur $0,84 \cdot 10^{-7}$, au bout de 10 itérations. On reproduit la courbe avec en moyenne une décimale de plus que précédemment (planche IV bis), avec les coefficients suivants :

$$a_1 = -4,0286963$$

$$a_2 = 6,1027494$$

$$a_3 = -4,1204248$$

$$a_4 = 1,0464196$$

Paradoxalement, une récurrence d'ordre 5, qui est celui de $x(t)$, conduit à une plus mauvaise identification.

Les performances médiocres de la méthode dans ce cas proviennent du terme en e^{-5t} , affecté d'un faible coefficient. En effet, à la période $T = 0,1$, l'influence de ce terme devient rapidement négligeable ; par conséquent, à partir de $T = 1$, la fonction est équivalente à un 4ème ordre. En somme, l'influence du terme en e^{-5t} est suffisante pour perturber l'identification à l'ordre 4, mais insuffisante pour justifier l'identification à l'ordre 5.

En conclusion, la technique d'identification des courbes par la méthode du pseudo-modèle est en général performante, à condition qu'il n'y ait pas de disproportion entre la période d'échantillonnage et

les constantes de temps de la courbe, de façon que les points sur lesquels s'effectue l'identification contiennent suffisamment d'information sur chaque composante.

b) Génération .

Deux exemples de génération de courbes planes paramétriques sont présentés. Dans chaque cas, une identification préalable de chaque fonction paramétrique est effectuée sur quelques dizaines de valeurs ; puis la courbe est générée sur environ 1000 points à l'aide des récurrences trouvées.

. Le premier exemple est la génération d'une ellipse

$$x(t) = 3 \cos t$$

$$y(t) = 2 \sin (t+1)$$

On générera 1000 points de cette courbe après avoir identifié les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ à la période $T = 0,02$ sur les intervalles respectifs $[0 ; 0,4]$, $[0 ; 0,8]$ et $[0;1,2]$. Les courbes générées analytiquement et par récurrences sont comparées au niveau des rayons vecteurs $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le tableau 8 indique les transformées en z obtenues pour les intervalles successifs.

Pour une identification sur l'intervalle de 60 périodes, les 1000 points sont générés avec une erreur sur le rayon inférieure à $0,250 \cdot 10^{-4}$.

TABLEAU 8

Intervalle d'identification	X(z)	r _x	Y(z)	r _y
$[0; 0,40]$	$\frac{3,000000 \cdot z^{-1}}{1 - 1,9996001 \cdot z^{-1} + 1,0000001 \cdot z^{-2}}$	$0,43 \cdot 10^{-15}$	$\frac{1,682941 - 1,660994 \cdot z^{-1}}{1 - 1,99960000 \cdot z^{-1} + 0,99999998 \cdot z^{-2}}$	$0,36 \cdot 10^{-15}$
$[0; 0,80]$	$\frac{3,000000 \cdot z^{-1}}{1 - 1,9996000 \cdot z^{-1} + 1,0000000 \cdot z^{-2}}$	$0,76 \cdot 10^{-15}$	$\frac{1,682941 - 1,660994 \cdot z^{-1}}{1 - 1,9996000 \cdot z^{-1} + 1,0000000 \cdot z^{-2}}$	$0,20 \cdot 10^{-15}$
$[0; 1,20]$	$\frac{3,000000 \cdot z^{-1}}{1 - 1,9996000 \cdot z^{-1} + 0,99999999 \cdot z^{-2}}$	$0,13 \cdot 10^{-13}$	$\frac{1,682941 - 1,660994 \cdot z^{-1}}{1 - 1,9996000 \cdot z^{-1} + 0,99999999 \cdot z^{-2}}$	$0,30 \cdot 10^{-15}$

Si l'identification a lieu sur 40 périodes, l'écart maximal entre les rayons vecteurs vaut $0,475.10^{-4}$.

Pour une identification portant sur 20 périodes, cet écart est de $1,57.10^{-4}$.

On trouvera en Annexe III le début du listing de la génération correspondant à l'identification sur 40 périodes. Ce listing représente la génération de l'ellipse sur un tour.

. L'autre exemple concerne une courbe du troisième ordre

$$x(t) = 0,2 \cdot e^{0,01t} + 2 \cdot \cos 5t$$

$y(t) = e^{-0,05t} + 1,5 \cdot \sin 6t$ que l'on veut
générer à la période $T = 0,02$ sur l'intervalle $[0 ; 6\pi]$, ce qui
correspond à 942 points.

L'identification des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ porte sur un intervalle de 60 périodes. On obtient les deux transformées en z

$$X(z) = \frac{2,200000 - 4,388410 \cdot z^{-1} + 2,190406 \cdot z^{-2}}{1 - 2,9902083 \cdot z^{-1} + 2,9904063 \cdot z^{-2} - 1,0002000 \cdot z^{-3}}$$

$$Y(z) = \frac{1,000000 - 1,806048 \cdot z^{-1} + 0,820611 \cdot z^{-2}}{1 - 2,9846177 \cdot z^{-1} + 2,9836326 \cdot z^{-2} - 0,99900050 \cdot z^{-3}}$$

A l'aide des coefficients a_i de $X(z)$ et $Y(z)$, on génère les 942 points de telle façon que l'erreur maximale sur le rayon vecteur soit de $0,821.10^{-4}$ par rapport à la courbe analytique. On trouvera en Annexe II le listing correspondant à la génération du premier tiers de la courbe.

Ce mode de génération de courbes donne donc des résultats intéressants. Il importe évidemment que l'identification des fonctions soit effectuée dans de bonnes conditions, puisque les points sur lesquels porte cette identification représentent toute l'information utilisée. Ceci est particulièrement apparent dans le premier exemple où l'on constate que plus l'intervalle d'identification est étendu, meilleure est la précision obtenue pour la courbe. Il y a donc un compromis à trouver entre la simplicité de l'identification et la précision de la génération.

c) Interpolation.

La méthode d'interpolation par récurrence a été appliquée à plusieurs cas.

Deux cas de fonctions du temps simples sont présentées tout d'abord. La méthode est ensuite appliquée à une courbe paramétrique, en l'occurrence l'ellipse générée au paragraphe b). Enfin, une courbe plane représentant la trajectoire d'un outil servant à usiner un profil d'aile est identifiée, puis interpolée.

. La fonction,

$$x(t) = 1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

est identifiée à la période $T = 1$, sur l'intervalle $[0 ; 40]$, puis interpolée avec $k = 10$. On obtient une récurrence en $T = 0,1$ que l'on peut comparer avec celle obtenue par identification au paragraphe a).

L'identification à $T = 1$ donne

$$X_T(z) = \frac{0,491674 \cdot z^{-1} + 0,246129 \cdot z^{-2}}{1 - 1,3975322 \cdot z^{-1} + 0,53286748 \cdot z^{-2} - 0,13533527 \cdot z^{-3}}$$

L'analyse du dénominateur de $X_T(z)$ met en évidence trois pôles

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1,000000 \\ \beta_2 &= 0,367879 \cdot e^{1,000001 \cdot j} \\ \beta_3 &= 0,367879 \cdot e^{-1,000001 \cdot j}\end{aligned}$$

Ces pôles, relatifs à T , correspondent à trois pôles en $T' = \frac{T}{10}$:

$$\begin{aligned}\beta_1' &= 1,000000 \\ \beta_2' &= 0,904837 \cdot e^{+0,100000 \cdot j} \\ \beta_3' &= 0,904837 \cdot e^{-0,100000 \cdot j}\end{aligned}$$

L'étude des points initiaux en T permet de donner l'expression analytique des points x_n' :

$$\begin{aligned}x_n' &= 0,999999 - 0,999999 \cdot (0,904837)^n \cos(n \cdot 0,100000) \\ &\quad - 0,999999 \cdot (0,904837)^n \sin(n \cdot 0,100000)\end{aligned}$$

On peut donc initialiser la récurrence interpolatrice dont les coefficients sont ceux de

$$D_{T'}(z) = \left[z^2 - 2z \cdot (0,904837) \cdot \cos(0,100000) + (0,904837)^2 \right] \cdot (z - 1,000000)$$

soit :

$$a'_1 = -2,800633$$

$$a'_2 = 2,619364$$

$$a'_3 = -0,818730$$

On applique alors la récurrence interpolatrice, en donnant les écarts entre $x_T^*(t)$ et $x_{T'}^*(t)$ aux points x_n :

$$\delta_n = x_n - x'_{nk}$$

En fin d'interpolation, on évalue l'écart quadratique moyen :

$$P = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^N \delta_n^2$$

qui définit la qualité de l'interpolation.

Dans l'exemple traité, on obtient

$$P = 0,120 \cdot 10^{-9}$$

Le listing de l'identification et de l'interpolation est donné en Annexe V.

. Interpolation de la fonction

$$x(t) = 20.e^{-t} - 50.e^{-\frac{t}{2}} + 30.e^{-\frac{t}{6}}$$

L'identification s'effectue à $T = 1$ sur l'intervalle $\left[0 ; 40 \right]$.
L'interpolation correspond à $k = 5$, c'est-à-dire $T' = 0,2$.

Les coefficients a_i obtenus par identification sont :

$$a_1 = -1,8208918$$

$$a_2 = 1,0479505$$

$$a_3 = -0,1888756$$

La correspondance entre les pôles est la suivante :

$T = 1$		$T' = 0,2$
$\beta_1 = 0,606530$	$\longrightarrow \circ \longrightarrow$	$\beta'_1 = 0,904837$
$\beta_2 = 0,367879$	$\longrightarrow \circ \longrightarrow$	$\beta'_2 = 0,818730$
$\beta_3 = 0,846482$	$\longrightarrow \circ \longrightarrow$	$\beta'_3 = 0,967216$

La récurrence interpolatrice est définie par les coefficients a'_i de

$$D_{T'}(z) = (z - \beta'_1) \cdot (z - \beta'_2) \cdot (z - \beta'_3)$$

soit

$$a'_1 = -2,6907842$$

$$a'_2 = 2,4078811$$

$$a'_3 = -0,7165313$$

et les conditions initiales données par l'expression

$$x'_n = -50,000001 (\beta'_1)^n + 20,000001 (\beta'_2)^n + 29,999999 (\beta'_3)^n$$

dont les coefficients sont les solutions du système (III. 4. f).

On obtient une interpolation avec un écart quadratique moyen sur les points x_n valant

$$P = 0,232 \cdot 10^{-10}$$

. Ellipse

$$x(t) = 3 \cdot \cos t$$

$$y(t) = 2 \cdot \sin (t+1)$$

L'identification se fait à $T = 1$ et l'interpolation est à $k = 10$ ($T' = 0,1$).

On obtient pour la période T

$$X_T(z) = \frac{3,000000 - 1,620906 z^{-1}}{1 - 1,0806046 z^{-1} + 1,000000 z^{-2}}$$

$$Y_T(z) = \frac{1,682941}{1 - 1,0806046 z^{-1} + 1,000000 z^{-2}}$$

au bout de 2 itérations pour chaque axe.

On en déduit deux récurrences interpolatrices identiques :

$$x'_n - 1,990008 \cdot x'_{n-1} + 1,000000 \cdot x'_{n-2} = 0$$

$$y'_n - 1,990008 \cdot y'_{n-1} + 1,000000 \cdot y'_{n-2} = 0$$

avec les points initiaux

$$M'_0 \left| \begin{array}{l} 3,000000 \\ 1,682941 \end{array} \right.$$

$$M'_1 \left| \begin{array}{l} 2,985012 \\ 1,782415 \end{array} \right.$$

On obtient les points de l'ellipse, générés de T' en T' , dont les listings sont donnés en Annexe VI. On peut les comparer à ceux obtenus par génération à la période $T = 0,02$, au paragraphe précédent.

Les écarts quadratiques moyens sur les points M_n sont :

$$P_x = 0,28 \cdot 10^{-8}$$

$$P_y = 0,61 \cdot 10^{-8}$$

. Profil d'aile.

Ayant relevé les coordonnées de 15 points sur la trajectoire du centre d'un outil devant usiner un profil d'aile (figure 11), on veut générer une courbe passant par ces points et obtenir ainsi une représentation paramétrique du profil par des fonctions exponentielles.

La génération du profil en une seule fois nécessitait des récurrences d'ordre trop élevé. Aussi a-t-on divisé la trajectoire en deux parties; l'extrados d'une part, le bord d'attaque et l'intrados d'autre part.

- Extrados (les cotes sont données en mm)

On a relevé 8 points de repère sur l'extrados.

M_0	$x_0 = 86,344$	$y_0 = 14,944$	$t = 0$
M_1	$x_1 = 74,574$	$y_1 = 16,785$	$t = 1$
M_2	$x_2 = 48,995$	$y_2 = 21,385$	$t = 2$
M_3	$x_3 = 19,192$	$y_3 = 26,251$	$t = 3$
M_4	$x_4 = -16,090$	$y_4 = 29,911$	$t = 4$
M_5	$x_5 = -48,902$	$y_5 = 29,821$	$t = 5$
M_6	$x_6 = -75,573$	$y_6 = 25,330$	$t = 6$
M_7	$x_7 = -95,011$	$y_7 = 15,282$	$t = 7$

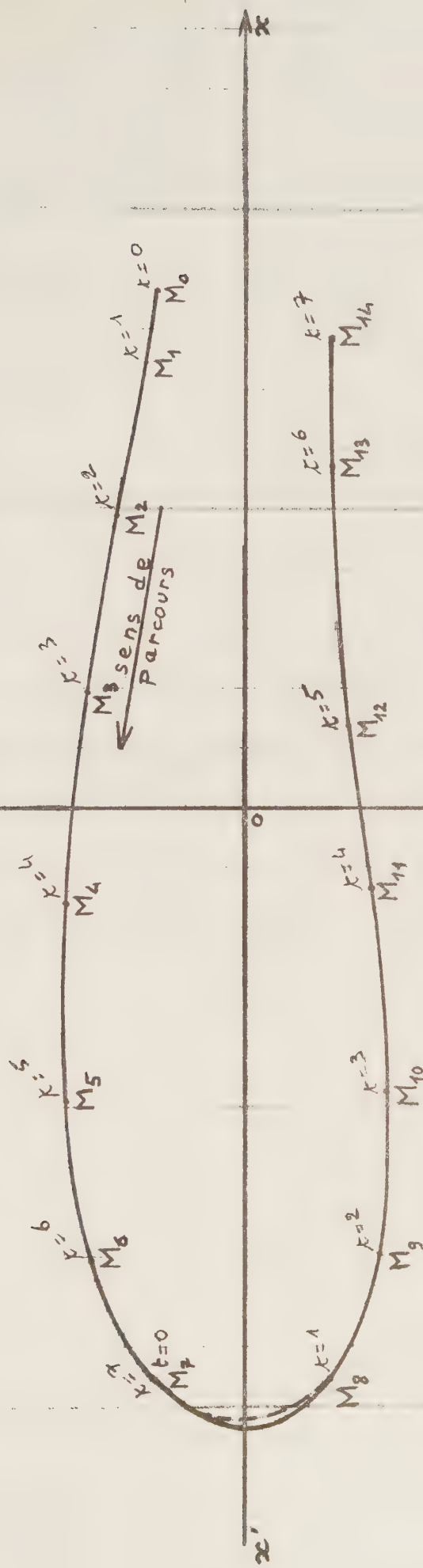


Fig. 11

Les récurrences obtenues en T par identification sont :

$$x_n + 0,453048 \cdot x_{n-1} - 2,044927 \cdot x_{n-2} - 0,163308 \cdot x_{n-3} \\ + 1,387066 \cdot x_{n-4} = 0$$

$$y_n - 1,668251 \cdot y_{n-1} - 0,225884 \cdot y_{n-2} + 1,970484 \cdot y_{n-3} \\ - 0,961039 \cdot y_{n-4} = 0$$

L'interpolation se fait à la période $T' = \frac{1}{10}$

Les récurrences interpolatrices sont d'ordre plus élevé que les récurrences initiales, en raison de la présence de pôles réels négatifs :

$$x'_n - 5,863696 \cdot x'_{n-1} + 14,523472 \cdot x'_{n-2} - 19,443179 \cdot x'_{n-3} \\ + 14,835885 \cdot x'_{n-4} - 6,117626 \cdot x'_{n-5} + 1,065158 \cdot x'_{n-6} = 0$$

$$y'_n - 4,902574 \cdot y'_{n-1} + 9,711425 \cdot y'_{n-2} - 9,717466 \cdot y'_{n-3} \\ + 4,911112 \cdot y'_{n-4} - 1,002491 \cdot y'_{n-5} = 0$$

Chaque récurrence interpolatrice est mise en oeuvre à partir de ses conditions initiales :

$$x'_0 = 86,3440$$

$$y'_0 = 14,9440$$

$$x'_1 = 84,5496$$

$$y'_1 = 14,9789$$

$$x'_2 = 84,7277$$

$$y'_2 = 15,0472$$

$$x'_3 = 83,8636$$

$$y'_3 = 15,1483$$

$$x'_4 = 82,9353$$

$$y'_4 = 15,2819$$

$$x'_5 = 81,9164$$

Précision d'interpolation :

$$P_x = 0,4 \cdot 10^{-4}$$

$$P_y = 0,8 \cdot 10^{-6}$$

- Bord d'attaque - Intrados.

$$M_7 \quad x_0 = -95,011 \quad y_0 = 15,282 \quad t = 0$$

$$M_8 \quad x_1 = -95,562 \quad y_1 = -14,014 \quad t = 1$$

$$M_9 \quad x_2 = -74,850 \quad y_2 = -22,480 \quad t = 2$$

$$M_{10} \quad x_3 = -47,722 \quad y_3 = -23,548 \quad t = 3$$

$$M_{11} \quad x_4 = -13,401 \quad y_4 = -20,960 \quad t = 4$$

$$M_{12} \quad x_5 = 23,980 \quad y_5 = -17,114 \quad t = 5$$

$$M_{13} \quad x_6 = 57,389 \quad y_6 = -14,720 \quad t = 6$$

$$M_{14} \quad x_7 = 78,754 \quad y_7 = -14,626 \quad t = 7$$

Réurrences en T

$$\begin{aligned} x_n - 2,496663 \cdot x_{n-1} + 2,273817 \cdot x_{n-2} - 0,646607 \cdot x_{n-3} \\ - 0,027989 \cdot x_{n-4} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n - 1,979447 \cdot y_{n-1} + 2,540284 \cdot y_{n-2} - 1,819558 \cdot y_{n-3} \\ + 0,389628 \cdot y_{n-4} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Réurrences en } T' = \frac{T}{10}$$

$$\begin{aligned} x'_n - 4,339642 \cdot x'_{n-1} + 7,528920 \cdot x'_{n-2} - 6,542855 \cdot x'_{n-3} \\ + 2,857874 \cdot x'_{n-4} - 0,504280 \cdot x'_{n-5} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_n - 3,890328 \cdot y'_{n-1} + 5,704462 \cdot y'_{n-2} - 3,718161 \cdot y'_{n-3} \\ + 0,910049 \cdot y'_{n-4} = 0 \end{aligned}$$

Conditions initiales en T' :

$$x'_0 = -95,0110$$

$$y'_0 = 15,2820$$

$$x'_1 = -98,6206$$

$$y'_1 = 10,5674$$

$$x'_2 = -101,4269$$

$$y'_2 = 6,3741$$

$$x'_3 = -103,1432$$

$$y'_3 = 2,6463$$

$$x'_4 = -103,7839$$

Précision d'interpolation :

$$P_x = 0,9 \cdot 10^{-6}$$

$$P_y = 0,2 \cdot 10^{-8}$$

Le détail des points générés est donné en Annexe VII.

Le profil d'aile cherché résultant d'une transformation de Kutta - Joukowski, nous avons pu tester la validité de la génération par récurrence. Comme le montre la figure 11, les deux profils sont très voisins, sauf en ce qui concerne le bord d'attaque, celui obtenu par récurrence (en trait plein) étant légèrement plus allongé que celui du profil Joukowski (en pointillé). Ceci est dû au choix des points M_7 et M_8 , que nous avons pris volontairement de part et d'autre de l'axe $x'Ox$; on met ainsi en évidence l'influence du choix des points de repère qui contiennent toute l'information dont on dispose au sujet de la trajectoire à générer.

Remarque :

Dans cet exemple, la présence de pôles réels négatifs $X_T(z)$

ne perturbe pas notablement l'interpolation ; le calcul des σ_p indéterminés n'est donc pas nécessaire.

On trouvera en Annexe VIII les listings de tous les programmes réalisés pour la mise en oeuvre des méthodes développées au cours de cet exposé.

* * * * *

CONCLUSION

Les méthodes d'analyse et d'exploitation de données numériques proposées dans cet exposé reposent sur l'identification par pseudo-modèle. La notion de pseudo-modèle, calculant une sortie fiction à partir des entrées et sorties réelles donne des résultats satisfaisants sur les plans de la vitesse de convergence et de la précision des paramètres obtenus.

Une étude plus détaillée pourrait définir de façon plus rigoureuse les possibilités et les limites de la méthode proposée. Il est probable cependant que ces limites se confondent le plus souvent avec celles de la théorie de l'échantillonnage : pour identifier une fonction ou un processus, il faut en effet posséder une certaine quantité d'information à son sujet. C'est de cette quantité d'informations que dépend le succès de l'identification. Ceci apparaît nettement lors de l'exploitation de la récurrence trouvée, dans le cas de la génération et surtout de l'interpolation des courbes, où la présence de pôles négatifs dans une transformée en z résulte d'une perte d'information par échantillonnage.

En ce qui concerne plus particulièrement l'interpolation, une méthode permettant de déterminer directement la récurrence interpolatrice, sans identifier la fonction $x_T^*(t)$, constituerait une amélioration certaine. Les premières études menées dans ce sens se sont heurtées au problème de l'initialisation. Cette question, certainement la plus délicate à résoudre dans la méthode exposée ici, se pose alors avec encore plus de vigueur.

Néanmoins, le principe de génération de courbe par récurrence offre des avantages certains sur le plan de la précision, et surtout de la rapidité de calcul. Pour fixer les idées, un calculateur industriel, effectuant une addition en $3 \mu s$ et une multiplication en $10 \mu s$, générerait les points d'une trajectoire en 3 axes

d'ordre 5 à la cadence de 200 μ s par point environ, ce qui rend possible l'utilisation de ce type de génération dans la commande directe des machines-outils par ordinateur industriel.

* * * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. VERON

Méthode de simulation numérique des systèmes physiques
par formulation récurrente déduite de la transformée en z.
Thèse de Docteur-Ingénieur présentée le 12 novembre 1970
à la Faculté des Sciences de Nancy.
N° CNRS : A04859.

[2] R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET

Commande optimale des processus - Editions Dunod.

[3] D. GIGON

Optimisation paramétrique des systèmes de commandes à
données numériques. Thèse de Doctorat d'Université, présentée
le 13 décembre 1968 à la Faculté des Sciences de Toulouse.

[4] D. H. WILDE

Méthodes de recherche d'un optimum - Editions Dunod.

[5] K. J. ASTRÖM - P. EYKHOFF

System identification - A survey - Automatica (G. B.) 1971 -
Tome 7 - N° 2 - p. 123-162.

[6] J. H. DELMAS

Principe d'une méthode d'identification des processus.
Congrès d'Automatique théorique Paris 1965 - Tiré de "Identification, optimisation et stabilité des systèmes automatiques" -
Dunod 1967 - pages 301-309.

[7] G. A. BEKEY

System identification - An introduction and a survey -
Simulation 1970 - Tome 15 - N° 4 - pages 151-166.

[8] R. M. DRESSLER

An approach to model-referenced adaptative control systems -
IEEE Transactions on Automatic Control 1967 - AC 12 - N° 1 -
pages 75-80.

[9] M. VERON - J. P. MUSSE

Génération numérique de courbes - Mécanique, Matériaux,
Electricité - N° 270-271 - Juin-Juillet 1972 - pages 16-19.

[10] J. RICHARD

Génération numérique de fonctions - Rapport de DEA -
Octobre 1971 - Laboratoire d'Electricité et d'Automatique -
Université Nancy I.

[11] J. R. RAGAZZINI - G. F. FRANKLIN

Les systèmes asservis échantillonnés - Editions Dunod.

[12] E. I. JURY

Theory and application of the z. transform method -
Editions John Wiley and Sons.

[13] F. W. SMITH

System Laplace - Transform estimation from sampled
date IEEE Transactions on Automatic Control - Vol. AC-13 -
N° 1 - Février 1968 - pages 37-44.

[14] A. TURGEON

Identification en temps réel des systèmes échantillonnés
en présence de bruits de mesure - Automatisme Tome XV - N° 3 -
Mars 1970 - pages 98-103.

$$\begin{aligned}
\bullet x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 &= K_1 e^{-2\lambda_1 T} + K_2 e^{-2\delta T} \cos 2\omega T + K_3 e^{-2\delta T} \sin 2\omega T \\
&\quad - (e^{-\lambda_1 T} + 2e^{-\delta T} \cos \omega T) (K_1 e^{-\lambda_1 T} + K_2 e^{-\delta T} \cos \omega T \\
&\quad + K_3 e^{-\delta T} \sin \omega T) + (e^{-2\delta T} + 2e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T) \\
&\quad (K_1 + K_2) \\
&= K_1 e^{-2\lambda_1 T} + K_2 e^{-2\delta T} \cos 2\omega T + K_3 e^{-2\delta T} \sin 2\omega T \\
&\quad - K_1 e^{-2\lambda_1 T} - K_2 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T - K_3 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \sin \omega T \\
&\quad - 2K_1 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T - 2K_2 e^{-2\delta T} \cos^2 \omega T - 2K_3 e^{-2\delta T} \sin \omega T \cos \omega T \\
&\quad + K_1 e^{-2\lambda_1 T} + K_2 e^{-2\lambda_1 T} \\
&\quad + 2K_1 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T + 2K_2 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T \\
&= K_1 e^{-2\delta T} + K_2 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T - K_3 e^{-\lambda_1 T - \delta T} \sin \omega T
\end{aligned}$$

d'où $x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 = b_2$

$$\begin{aligned}
\bullet x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0 &= K_1 e^{-3\lambda_1 T} + K_2 e^{-3\delta T} \cos 3\omega T + K_3 e^{-3\delta T} \sin 3\omega T \\
&\quad - (e^{-\lambda_1 T} + 2e^{-\delta T} \cos \omega T) (K_1 e^{-2\delta T} + K_2 e^{-2\delta T} \cos 2\omega T + K_3 e^{-2\delta T} \sin 2\omega T) \\
&\quad + (e^{-2\delta T} + 2e^{-\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T) (K_1 e^{-\lambda_1 T} + K_2 e^{-\delta T} \cos \omega T + K_3 e^{-\delta T} \sin \omega T) \\
&\quad - e^{-\lambda_1 T} e^{-2\delta T} (K_1 + K_2) \\
&= K_1 e^{-3\delta T} + K_2 e^{-3\delta T} \cos 3\omega T + K_3 e^{-3\delta T} \sin 3\omega T \\
&\quad + K_1 e^{-3\lambda_1 T} - K_2 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} \cos 2\omega T - K_3 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} \sin 2\omega T \\
&\quad - 2K_1 e^{-2\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T - 2K_2 e^{-3\delta T} \cos \omega T \cos 2\omega T - 2K_3 e^{-3\delta T} \cos \omega T \sin 2\omega T \\
&\quad + K_1 e^{-2\delta T - \lambda_1 T} + K_2 e^{-3\delta T} \cos \omega T + K_3 e^{-3\delta T} \sin \omega T \\
&\quad + 2K_1 e^{-2\lambda_1 T - \delta T} \cos \omega T + 2K_2 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} \cos^2 \omega T + 2K_3 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} \sin \omega T \cos \omega T \\
&\quad - K_1 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} - K_2 e^{-\lambda_1 T - 2\delta T} \\
&= K_2 e^{-3\delta T} [\cos 3\omega T + \cos \omega T - 2 \cos \omega T \cos 2\omega T] \\
&\quad + K_3 e^{-3\delta T} [\sin 3\omega T + \sin \omega T - 2 \cos \omega T \sin 2\omega T] = c
\end{aligned}$$

d'où $x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0 = 0$

ANNEXE II

Identification du système

$$H(s) = \frac{1}{(1 + 2s)(1 + 6s)}$$

soumis à une entrée composée successivement

- d'un échelon $u(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$

- d'une rampe $t \cdot u(t-1)$ pour $1 \leq t \leq 3$

- d'une exponentielle négative

$$3e^{-(t-3)} \cdot u(t-3) \quad \text{pour } 3 \leq t$$

Période d'échantillonnage $T = 0,05$

Identification sur les intervalles successifs

$$\begin{aligned} & [0 \quad ; 2] \\ & [2,05; 4,05] \\ & [4,10; 6,10] \\ & [6,15; 8,15] \\ & [8,20; 10,20] \end{aligned}$$

2.050
2.100
2.150
2.200
2.250
2.300
2.350
2.400
2.450
2.500
2.550
2.600
2.650
2.700
2.750
2.800
2.850
2.900
2.950
3.000
3.050
3.100
3.150
3.200
3.250
3.300
3.349
3.400
3.450
3.500
3.550
3.599
3.650
3.700
3.750
3.800
3.849
3.899
3.950
4.000

2.050000
2.100000
2.150000
2.200000
2.250000
2.300000
2.350000
2.400000
2.450000
2.500000
2.550000
2.600000
2.650000
2.700000
2.750000
2.800000
2.850000
2.900000
2.950000
3.000000
2.8546882
2.7145122
2.5821239
2.4561922
2.3364023
2.2224546
2.1140642
2.0109601
1.9118844
1.8195919
1.7308494
1.6464349
1.5661373
1.4897559
1.4170996
1.3479858
1.2822448
1.2197089
1.1602230
1.1006292
1.0422132

0.133750
0.133420
0.133087
0.132753
0.132419
0.132085
0.131751
0.131417
0.131083
0.130749
0.130415
0.130081
0.129747
0.129413
0.129079
0.128745
0.128411
0.128077
0.127743
0.127409
0.127075
0.126741
0.126407
0.126073
0.125739
0.125405
0.125071
0.124737
0.124403
0.124069
0.123735
0.123401
0.123067
0.122733
0.122399
0.122065
0.121731
0.121397
0.121063
0.120729
0.120395
0.120061
0.119727
0.119393
0.119059
0.118725
0.118391
0.118057
0.117723
0.117389
0.117055
0.116721
0.116387
0.116053
0.115719
0.115385
0.115051
0.114717
0.114383
0.114049
0.113715
0.113381
0.113047
0.112713
0.112379
0.112045
0.111711
0.111377
0.111043
0.110709
0.110375
0.110041
0.109707
0.109373
0.109039
0.108705
0.108371
0.108037
0.107703
0.107369
0.107035
0.106701
0.106367
0.106033
0.105699
0.105365
0.105031
0.104697
0.104363
0.104029
0.103695
0.103361
0.103027
0.102693
0.102359
0.102025
0.101691
0.101357
0.101023
0.100689
0.100355
0.100021
0.099687
0.099353
0.099019
0.098685
0.098351
0.098017
0.097683
0.097349
0.097015
0.096681
0.096347
0.096013
0.095679
0.095345
0.095011
0.094677
0.094343
0.094009
0.093675
0.093341
0.093007
0.092673
0.092339
0.092005
0.091671
0.091337
0.091003
0.090669
0.090335
0.090001
0.089667
0.089333
0.089000
0.088666
0.088332
0.088000
0.087666
0.087332
0.087000
0.086666
0.086332
0.086000
0.085666
0.085332
0.085000
0.084666
0.084332
0.084000
0.083666
0.083332
0.083000
0.082666
0.082332
0.082000
0.081666
0.081332
0.081000
0.080666
0.080332
0.080000
0.079666
0.079332
0.079000
0.078666
0.078332
0.078000
0.077666
0.077332
0.077000
0.076666
0.076332
0.076000
0.075666
0.075332
0.075000
0.074666
0.074332
0.074000
0.073666
0.073332
0.073000
0.072666
0.072332
0.072000
0.071666
0.071332
0.071000
0.070666
0.070332
0.070000
0.069666
0.069332
0.069000
0.068666
0.068332
0.068000
0.067666
0.067332
0.067000
0.066666
0.066332
0.066000
0.065666
0.065332
0.065000
0.064666
0.064332
0.064000
0.063666
0.063332
0.063000
0.062666
0.062332
0.062000
0.061666
0.061332
0.061000
0.060666
0.060332
0.060000
0.059666
0.059332
0.059000
0.058666
0.058332
0.058000
0.057666
0.057332
0.057000
0.056666
0.056332
0.056000
0.055666
0.055332
0.055000
0.054666
0.054332
0.054000
0.053666
0.053332
0.053000
0.052666
0.052332
0.052000
0.051666
0.051332
0.051000
0.050666
0.050332
0.050000
0.049666
0.049332
0.049000
0.048666
0.048332
0.048000
0.047666
0.047332
0.047000
0.046666
0.046332
0.046000
0.045666
0.045332
0.045000
0.044666
0.044332
0.044000
0.043666
0.043332
0.043000
0.042666
0.042332
0.042000
0.041666
0.041332
0.041000
0.040666
0.040332
0.040000
0.039666
0.039332
0.039000
0.038666
0.038332
0.038000
0.037666
0.037332
0.037000
0.036666
0.036332
0.036000
0.035666
0.035332
0.035000
0.034666
0.034332
0.034000
0.033666
0.033332
0.033000
0.032666
0.032332
0.032000
0.031666
0.031332
0.031000
0.030666
0.030332
0.030000
0.029666
0.029332
0.029000
0.028666
0.028332
0.028000
0.027666
0.027332
0.027000
0.026666
0.026332
0.026000
0.025666
0.025332
0.025000
0.024666
0.024332
0.024000
0.023666
0.023332
0.023000
0.022666
0.022332
0.022000
0.021666
0.021332
0.021000
0.020666
0.020332
0.020000
0.019666
0.019332
0.019000
0.018666
0.018332
0.018000
0.017666
0.017332
0.017000
0.016666
0.016332
0.016000
0.015666
0.015332
0.015000
0.014666
0.014332
0.014000
0.013666
0.013332
0.013000
0.012666
0.012332
0.012000
0.011666
0.011332
0.011000
0.010666
0.010332
0.010000
0.009666
0.009332
0.009000
0.008666
0.008332
0.008000
0.007666
0.007332
0.007000
0.006666
0.006332
0.006000
0.005666
0.005332
0.005000
0.004666
0.004332
0.004000
0.003666
0.003332
0.003000
0.002666
0.002332
0.002000
0.001666
0.001332
0.001000
0.000666
0.000332
0.000000

0.0425994
0.042265
0.041931
0.041597
0.041263
0.040929
0.040595
0.040261
0.039927
0.039593
0.039259
0.038925
0.038591
0.038257
0.037923
0.037589
0.037255
0.036921
0.036587
0.036253
0.035919
0.035585
0.035251
0.034917
0.034583
0.034249
0.033915
0.033581
0.033247
0.032913
0.032579
0.032245
0.031911
0.031577
0.031243
0.030909
0.030575
0.030241
0.029907
0.029573
0.029239
0.028905
0.028571
0.028237
0.027903
0.027569
0.027235
0.026901
0.026567
0.026233
0.025899
0.025565
0.025231
0.024897
0.024563
0.024229
0.023895
0.023561
0.023227
0.022893
0.022559
0.022225
0.021891
0.021557
0.021223
0.020889
0.020555
0.020221
0.019887
0.019553
0.019219
0.018885
0.018551
0.018217
0.017883
0.017549
0.017215
0.016881
0.016547
0.016213
0.015879
0.015545
0.015211
0.014877
0.014543
0.014209
0.013875
0.013541
0.013207
0.012873
0.012539
0.012205
0.011871
0.011537
0.011203
0.010869
0.010535
0.010201
0.009867
0.009533
0.009199
0.008865
0.008531
0.008197
0.007863
0.007529
0.007195
0.006861
0.006527
0.006193
0.005859
0.005525
0.005191
0.004857
0.004523
0.004189
0.003855
0.003521
0.003187
0.002853
0.002519
0.002185
0.001851
0.001517
0.001183
0.000849
0.000515
0.000181
0.000000

4.200
4.150
4.200
4.250
4.300
4.350
4.400
4.450
4.500
4.550
4.600
4.650
4.700
4.750
4.800
4.850
4.900
4.950
5.000
5.050
5.100
5.150
5.200
5.250
5.300
5.350
5.400
5.450
5.500
5.550
5.600
5.650
5.700
5.750
5.800
5.850
5.900
5.950
6.000
6.050
6.100

0.9786232
0.9400103
0.9011826
0.8595143
0.8171953
0.7747207
0.7327008
0.7037108
0.6693904
0.6367439
0.6056895
0.5761407
0.5480505
0.5213213
0.4958966
0.4717115
0.4487058
0.4268222
0.4060058
0.3862047
0.3673692
0.3494524
0.3324094
0.3161976
0.3007765
0.2861074
0.2721538
0.2588807
0.2462549
0.2342449
0.2228207
0.2119536
0.2016165
0.1917835
0.1824301
0.1735329
0.1650066
0.1570191
0.1493612
0.1420767
0.1351476

0.5121269
0.5211347
0.5301322
0.5391178
0.5480871
0.5569300
0.5629692
0.5706739
0.5781543
0.5854081
0.5924346
0.5992336
0.6058249
0.6121439
0.6182003
0.6241582
0.6298286
0.6352701
0.6404935
0.6454976
0.6502844
0.6548564
0.6592160
0.6633656
0.6673081
0.6710462
0.6745830
0.6779213
0.6810643
0.6840152
0.6867772
0.6893536
0.6917477
0.6939629
0.6960026
0.6978701
0.6995691
0.7011028
0.7024747
0.7036844
0.7047472

0.7121300
0.7211349
0.7299322
0.7385178
0.7468871
0.7550389
0.7629682
0.7706739
0.7781543
0.7854081
0.7924346
0.7992336
0.8058249
0.8121439
0.8182003
0.8241581
0.8298256
0.8352701
0.8404934
0.8454976
0.8502844
0.8548564
0.8592160
0.8633656
0.8673081
0.8710462
0.8745830
0.8779213
0.8810643
0.8840152
0.8867772
0.8893536
0.8917477
0.8939629
0.8960026
0.8978702
0.8995691
0.9011028
0.9024749
0.9036844
0.9047472

6.150
6.200
6.250
6.300
6.350
6.400
6.448
6.500
6.550
6.600
6.650
6.695
6.750
6.800
6.850
6.900
6.949
7.000
7.050
7.100
7.150
7.199
7.250
7.300
7.350
7.400
7.449
7.500
7.550
7.600
7.650
7.699
7.750
7.800
7.850
7.900
7.949
8.000
8.050
8.100
8.150

0.1245553
0.1242866
0.1163226
0.1106496
0.1042530
0.1001198
0.0942369
0.0905921
0.0861739
0.0819711
0.0779733
0.0741705
0.0705532
0.0671123
0.0638392
0.0607257
0.0577641
0.0549469
0.0522671
0.0497180
0.0472932
0.0449867
0.0427927
0.0407056
0.0387204
0.0368320
0.0350357
0.0333269
0.0317016
0.0301555
0.0286848
0.0272858
0.0259550
0.0246892
0.0234851
0.0223397
0.0212502
0.0202138
0.0192280
0.0182902
0.0173987

0.7056546
0.7064140
0.7071288
0.7079024
0.7086582
0.7093935
0.7081097
0.7080520
0.7078696
0.7075659
0.7071438
0.7066069
0.7059579
0.7052009
0.7043361
0.7033694
0.7023027
0.7011389
0.6998808
0.6985313
0.6970931
0.6955690
0.6939613
0.6922732
0.6905068
0.6886648
0.6867495
0.6847636
0.6827092
0.6805889
0.6784048
0.6761592
0.6738542
0.6714921
0.6690748
0.6666045
0.6640833
0.6615129
0.6588954
0.6562327
0.6535260

8.200
8.250
8.300
8.350
8.400
8.450
8.500
8.550
8.600
8.650
8.700
8.750
8.800
8.850
8.900
8.950
9.000
9.050
9.100
9.150
9.200
9.250
9.300
9.350
9.400
9.450
9.500
9.550
9.600
9.650
9.700
9.750
9.800
9.850
9.900
9.950
10.000
10.050
10.100
10.150
10.200

0.0165496
0.0157425
0.0149747
0.0142444
0.0135497
0.0128889
0.0122603
0.0116623
0.0110935
0.0105525
0.0100378
0.0095483
0.0090826
0.0086396
0.0082183
0.0078175
0.0074362
0.0070735
0.0067286
0.0064004
0.0060882
0.0057913
0.0055089
0.0052402
0.0049846
0.0047415
0.0045103
0.0042903
0.0040811
0.0038820
0.0036927
0.0035126
0.0033413
0.0031783
0.0030233
0.0028759
0.0027356
0.0026027
0.0024753
0.0023545
0.0022397

0.6507788
0.6479911
0.6451653
0.6423031
0.6394059
0.6364756
0.6335135
0.6305212
0.6275002
0.6244520
0.6213779
0.6182794
0.6151576
0.6120141
0.6088500
0.6056665
0.6024649
0.5992464
0.5960120
0.5927630
0.5895003
0.5862250
0.5829382
0.5796408
0.5763338
0.5730181
0.5696949
0.5663647
0.5630285
0.5596871
0.5563414
0.5529922
0.5496401
0.5462861
0.5429307
0.5395747
0.5362187
0.5328634
0.5295095
0.5261577
0.5228053

0.6507788
0.6479911
0.6451653
0.6423031
0.6394059
0.6364754
0.6335135
0.6305212
0.6275002
0.6244520
0.6213779
0.6182793
0.6151576
0.612014V
0.6088509
0.6056665
0.6024649
0.5992464
0.5960120
0.5927630
0.5895003
0.5862250
0.5829382
0.5796408
0.5763338
0.5730181
0.5696949
0.5663647
0.5630284
0.559687V
0.5563414
0.5529922
0.5496401
0.5462861
0.5429307
0.5395747
0.5362187
0.5328634
0.5295095
0.5261577
0.5228053

ANNEXE III

Génération de l'ellipse

$$x(t) = 3 \cos t$$

$$y(t) = 2 \sin (t+1) \quad \text{à } T = 0,02 \text{ s}$$

après une identification portant sur un intervalle de 40 périodes :
 $[0 ; 0,4]$.

Noms des variables :

XREC = valeur de x_n obtenue par récurrence

XFCT = valeur de x_n obtenue analytiquement

YREC = valeur de y_n obtenue par récurrence

YFCT = valeur de y_n obtenue analytiquement

RREC = valeur du rayon vecteur obtenue par

$$RREC = \sqrt{(XREC)^2 + (YREC)^2}$$

RFCT = valeur du rayon vecteur obtenue par

$$RFCT = \sqrt{(XFCT)^2 + (YFCT)^2}$$

C	XFCT	YREC	YFCT	RREC	RFCT
00000	3.000000	1.682941	1.682941	3.439810	3.439810
99400	2.999400	1.704216	1.704216	3.449746	3.449746
97600	2.997600	1.724808	1.724808	3.458405	3.458405
94601	2.994601	1.744710	1.744710	3.465783	3.465783
90405	2.990405	1.763915	1.763915	3.471875	3.471875
85012	2.985012	1.782414	1.782414	3.476679	3.476679
78425	2.978425	1.800200	1.800200	3.480193	3.480193
70647	2.970647	1.817266	1.817266	3.482414	3.482414
61681	2.961681	1.833606	1.833606	3.483341	3.483341
51530	2.951531	1.849211	1.849212	3.482975	3.482975
40199	2.940199	1.864078	1.864078	3.481315	3.481316
27692	2.927692	1.878198	1.878198	3.478363	3.478363
14013	2.914013	1.891567	1.891568	3.474119	3.474119
99169	2.899169	1.904180	1.904180	3.468585	3.468586
83166	2.883166	1.916031	1.916031	3.461765	3.461766
66009	2.866009	1.927116	1.927116	3.453662	3.453662
47705	2.847706	1.937430	1.937430	3.444279	3.444280
28263	2.828264	1.946968	1.946969	3.433622	3.433622
07690	2.807690	1.955729	1.955729	3.421695	3.421695
785993	2.785993	1.963706	1.963707	3.408504	3.408505
63182	2.763182	1.970899	1.970899	3.394056	3.394057
739266	2.739266	1.977303	1.977303	3.378358	3.378359
714254	2.714254	1.982916	1.982916	3.361418	3.361419
688156	2.688157	1.987736	1.987736	3.343244	3.343245
660984	2.660984	1.991761	1.991761	3.323845	3.323846
632746	2.632747	1.994989	1.994989	3.303231	3.303232
603456	2.603457	1.997419	1.997420	3.281413	3.281414
573125	2.573126	1.999051	1.999051	3.258401	3.258402
541764	2.541765	1.999883	1.999883	3.234207	3.234208
509386	2.509387	1.999914	1.999915	3.208844	3.208845
476005	2.476006	1.999146	1.999147	3.182324	3.182326
441634	2.441635	1.997578	1.997579	3.154663	3.154664
406286	2.406287	1.995212	1.995212	3.125873	3.125874
369975	2.369976	1.992047	1.992047	3.095970	3.095972
332716	2.332718	1.988085	1.988086	3.064971	3.064973
294525	2.294526	1.983328	1.983329	3.032892	3.032894
255415	2.255417	1.977778	1.977779	2.999751	2.999753
215404	2.215405	1.971437	1.971438	2.965565	2.965567
174506	2.174508	1.964307	1.964308	2.930355	2.930357
132738	2.132740	1.956392	1.956393	2.894139	2.894141
090118	2.090120	1.947694	1.947695	2.856940	2.856942
046661	2.046663	1.938217	1.938218	2.818778	2.818780
002386	2.002388	1.927965	1.927966	2.779676	2.779678
957310	1.957312	1.916941	1.916942	2.739658	2.739660
911451	1.911453	1.905151	1.905152	2.698749	2.698751
864827	1.864829	1.892599	1.892600	2.656974	2.656976
817458	1.817460	1.879289	1.879290	2.614361	2.614363
769361	1.769364	1.865228	1.865230	2.570937	2.570939
720557	1.720559	1.850421	1.850423	2.526732	2.526734
671065	1.671067	1.834874	1.834875	2.481778	2.481780
620904	1.620906	1.818593	1.818594	2.436106	2.436108
570095	1.570097	1.801584	1.801586	2.389750	2.389753
518658	1.518660	1.783855	1.783857	2.342747	2.342750
466613	1.466616	1.765413	1.765414	2.295133	2.295136
413982	1.413985	1.746264	1.746265	2.246950	2.246953
360785	1.360786	1.726417	1.726418	2.198238	2.198241

REC	X FCT	Y REC	Y FCT	R REC	R FCT
7044	1.307047	1.705879	1.705880	2.149043	2.149046
2780	1.252783	1.684659	1.684660	2.099413	2.099416
8015	1.198018	1.662765	1.662766	2.049397	2.049400
2771	1.142774	1.640206	1.640207	1.999050	1.999053
7069	1.087073	1.616990	1.616992	1.948430	1.948433
0933	1.030937	1.593128	1.593130	1.897599	1.897603
4385	0.974388	1.568629	1.568631	1.846625	1.846629
7447	0.917450	1.543503	1.543505	1.795581	1.795584
0141	0.860145	1.517759	1.517761	1.744545	1.744548
2492	0.802496	1.491408	1.491410	1.693603	1.693607
4522	0.744526	1.464460	1.464462	1.642850	1.642854
6254	0.686256	1.436927	1.436929	1.592389	1.592393
7712	0.627716	1.408819	1.408821	1.542333	1.542337
8918	0.568922	1.380147	1.380150	1.492807	1.492811
9897	0.509901	1.350923	1.350926	1.443949	1.443953
0672	0.450676	1.321159	1.321162	1.395911	1.395915
1266	0.391271	1.290867	1.290870	1.348861	1.348865
1705	0.331709	1.260058	1.260061	1.302987	1.302991
2010	0.272014	1.228745	1.228748	1.258493	1.258497
2207	0.212211	1.196941	1.196944	1.215607	1.215610
2318	0.152323	1.164658	1.164661	1.174576	1.174580
2369	0.092374	1.131909	1.131912	1.135672	1.135675
2383	0.032386	1.098707	1.098710	1.099185	1.099188
7615	-0.027610	1.065066	1.065069	1.065424	1.065427
7603	-0.087598	1.030999	1.031002	1.034714	1.034717
7556	-0.147551	0.996520	0.996523	1.007385	1.007387
7450	-0.207445	0.961642	0.961645	0.983763	0.983765
7261	-0.267256	0.926379	0.926382	0.964161	0.964163
6965	-0.326960	0.890746	0.890749	0.948859	0.948861
6538	-0.386533	0.854756	0.854759	0.938094	0.938095
5957	-0.445952	0.818424	0.818428	0.932039	0.932039
5197	-0.505192	0.781766	0.781769	0.930796	0.930796
4235	-0.564230	0.744794	0.744798	0.934387	0.934387
3048	-0.623042	0.707525	0.707528	0.942751	0.942750
1611	-0.681606	0.669972	0.669976	0.955749	0.955748
9902	-0.739896	0.632152	0.632155	0.973176	0.973174
7896	-0.797891	0.594079	0.594082	0.994771	0.994768
5572	-0.855567	0.555768	0.555771	1.020236	1.020234
2205	-0.912900	0.517234	0.517238	1.049251	1.049248
9874	-0.969866	0.478494	0.478498	1.081486	1.081483
6454	-1.026446	0.439563	0.439567	1.116612	1.116609
2624	-1.082618	0.400456	0.400460	1.154313	1.154309
8360	-1.138355	0.361188	0.361192	1.194287	1.194283
3642	-1.193636	0.321776	0.321780	1.236253	1.236248
8446	-1.248440	0.282236	0.282240	1.279951	1.279946
2730	-1.302744	0.242582	0.242586	1.325143	1.325138
6534	-1.356526	0.202831	0.202836	1.371614	1.371609
9774	-1.409769	0.163000	0.163004	1.419166	1.419161
2451	-1.462446	0.123103	0.123107	1.467623	1.467618
4643	-1.514536	0.083157	0.083161	1.516825	1.516819
6030	-1.566024	0.043177	0.043182	1.566625	1.566619
6889	-1.616834	0.003181	0.003185	1.616893	1.616887
7103	-1.667097	-0.036816	-0.036812	1.667509	1.667503
6649	-1.716643	-0.076800	-0.076795	1.718366	1.718360
5508	-1.765503	-0.116752	-0.116748	1.769365	1.769359
3662	-1.813656	-0.156658	-0.156653	1.820415	1.820409
1090	-1.861084	-0.196501	-0.196497	1.871435	1.871429
7773	-1.907766	-0.236266	-0.236261	1.922348	1.922342
8694	-1.953688	-0.275936	-0.275931	1.973084	1.973078
8833	-1.998827	-0.315495	-0.315491	2.023579	2.023573
1173	-2.043167	-0.354929	-0.354924	2.073772	2.073765

REC	XFCT	YREC	YFCT	RREC	RFCT
086695	-2.085589	-0.394220	-0.394216	2.123607	2.123600
129383	-2.129377	-0.433354	-0.433350	2.173032	2.173025
171218	-2.171211	-0.472315	-0.472310	2.221997	2.221991
212186	-2.212181	-0.511086	-0.511082	2.270457	2.270451
252269	-2.252261	-0.549653	-0.549649	2.318369	2.318362
291450	-2.291445	-0.588001	-0.587996	2.365690	2.365684
329716	-2.329711	-0.626113	-0.626108	2.412383	2.412377
367049	-2.367044	-0.663974	-0.663970	2.458411	2.458405
403435	-2.403430	-0.701570	-0.701566	2.503738	2.503732
438861	-2.438856	-0.738886	-0.738881	2.549332	2.549325
473310	-2.473305	-0.775906	-0.775901	2.594217	2.594210
506771	-2.506766	-0.812615	-0.812611	2.635193	2.635187
539228	-2.539224	-0.849000	-0.848995	2.677432	2.677425
570671	-2.570666	-0.885045	-0.885040	2.718715	2.718709
601084	-2.601080	-0.920736	-0.920731	2.759238	2.759232
630458	-2.630453	-0.956058	-0.956054	2.798812	2.798807
658779	-2.658774	-0.991089	-0.991084	2.837461	2.837455
686037	-2.686032	-1.025547	-1.025538	2.875118	2.875112
712220	-2.712215	-1.059676	-1.059672	2.911881	2.911875
737319	-2.737315	-1.093386	-1.093382	2.947611	2.947605
761323	-2.761318	-1.126658	-1.126654	2.982325	2.982319
784222	-2.784216	-1.159480	-1.159476	3.016005	3.015999
806007	-2.806003	-1.191838	-1.191834	3.048652	3.048646
826671	-2.826666	-1.223719	-1.223715	3.080188	3.080182
846203	-2.846197	-1.255111	-1.255107	3.110655	3.110650
864597	-2.864593	-1.286001	-1.285997	3.140019	3.140013
881845	-2.881842	-1.316377	-1.316372	3.168262	3.168256
897941	-2.897937	-1.346225	-1.346221	3.195369	3.195364
912877	-2.912874	-1.375536	-1.375532	3.221328	3.221322
926649	-2.926645	-1.404296	-1.404292	3.246124	3.246119
939249	-2.939246	-1.432495	-1.432491	3.269745	3.269740
950675	-2.950671	-1.460120	-1.460116	3.292177	3.292173
960919	-2.960916	-1.487162	-1.487158	3.313411	3.313407
969980	-2.969977	-1.513608	-1.513604	3.333435	3.333431
977852	-2.977850	-1.539449	-1.539446	3.352240	3.352235
984534	-2.984531	-1.564675	-1.564671	3.369815	3.369811
990021	-2.990017	-1.589275	-1.589271	3.386152	3.386148
994313	-2.994310	-1.613238	-1.613235	3.401242	3.401239
997407	-2.997405	-1.636557	-1.636554	3.415080	3.415076
999302	-2.999300	-1.659221	-1.659218	3.427657	3.427653
999998	-2.999996	-1.681222	-1.681218	3.438967	3.438964
999491	-2.999491	-1.702649	-1.702646	3.449005	3.449002
997789	-2.997787	-1.723196	-1.723193	3.457766	3.457763
994885	-2.994884	-1.743151	-1.743151	3.465245	3.465243
990784	-2.990783	-1.762414	-1.762411	3.471440	3.471437
985486	-2.985485	-1.780970	-1.780967	3.476346	3.476344
978995	-2.978994	-1.798813	-1.798810	3.481983	3.481980
971311	-2.971310	-1.815937	-1.815934	3.482286	3.482284
962439	-2.962438	-1.832233	-1.832231	3.483317	3.483315
952383	-2.952382	-1.847994	-1.847996	3.483054	3.483052
941145	-2.941144	-1.862923	-1.862921	3.481497	3.481495
928731	-2.928731	-1.877104	-1.877101	3.478647	3.478646
915145	-2.915146	-1.890533	-1.890530	3.474505	3.474503
900394	-2.900394	-1.903206	-1.903204	3.469074	3.469072
884482	-2.884483	-1.915116	-1.915113	3.462357	3.462356
867417	-2.867417	-1.926369	-1.926367	3.454355	3.454355
849204	-2.849205	-1.936639	-1.936637	3.445078	3.445074
829852	-2.829853	-1.946239	-1.946237	3.434518	3.434518
809368	-2.809370	-1.955061	-1.955060	3.422691	3.422692
787761	-2.787762	-1.962101	-1.962100	3.409601	3.409601
765038	-2.765040	-1.967036	-1.967035	3.395253	3.395253

REC	X FCT	YREC	YFCT	R REC	R FCT
741209	-2.741211	-1.976823	-1.976822	3.379654	3.379655
716284	-2.716286	-1.982499	-1.982498	3.362812	3.362813
690273	-2.690275	-1.987382	-1.987381	3.344736	3.344737
663185	-2.663187	-1.991471	-1.991470	3.325434	3.325435
635032	-2.635035	-1.994762	-1.994762	3.304916	3.304918
605825	-2.605828	-1.997256	-1.997256	3.283193	3.283193
575576	-2.575579	-1.998951	-1.998951	3.260276	3.260276
544296	-2.544300	-1.999846	-1.999846	3.236175	3.236175
511999	-2.512003	-1.999942	-1.999942	3.210905	3.210907
478698	-2.478701	-1.999237	-1.999237	3.184477	3.184480
444404	-2.444408	-1.997733	-1.997733	3.156905	3.156905
409133	-2.409137	-1.995430	-1.995430	3.128205	3.128208
372899	-2.372903	-1.992328	-1.992329	3.098390	3.098394
335715	-2.335719	-1.988430	-1.988431	3.067478	3.067481
297597	-2.297601	-1.983736	-1.983737	3.035484	3.035488
258560	-2.258565	-1.978249	-1.978250	3.002426	3.002430
218619	-2.218624	-1.971971	-1.971972	2.968323	2.968327
177791	-2.177791	-1.964904	-1.964905	2.933193	2.933198
136092	-2.136096	-1.957051	-1.957052	2.897057	2.897062
093539	-2.093545	-1.948415	-1.948416	2.859935	2.859940
050148	-2.050154	-1.938999	-1.939001	2.821848	2.821851
005337	-2.005943	-1.928809	-1.928810	2.782820	2.782826
960924	-1.960931	-1.917846	-1.917848	2.742874	2.742880
915127	-1.915133	-1.906117	-1.906119	2.702035	2.702041
868563	-1.868570	-1.893625	-1.893627	2.660328	2.660334
821252	-1.821259	-1.880376	-1.880378	2.617780	2.617787
773213	-1.773220	-1.866374	-1.866377	2.574420	2.574427
724464	-1.724472	-1.851626	-1.851629	2.530276	2.530283
675026	-1.675033	-1.836138	-1.836141	2.485380	2.485387
624918	-1.624925	-1.819915	-1.819918	2.439764	2.439771
574159	-1.574167	-1.802964	-1.802967	2.393461	2.393469
522771	-1.522779	-1.785292	-1.785295	2.346508	2.346516
470774	-1.470782	-1.766906	-1.766909	2.298942	2.298949
418189	-1.418197	-1.747813	-1.747816	2.250802	2.250810
365036	-1.365045	-1.728021	-1.728024	2.202131	2.202139
311337	-1.311346	-1.707537	-1.707541	2.152973	2.152981
257114	-1.257123	-1.686371	-1.686375	2.103375	2.103383
202388	-1.202397	-1.664530	-1.664534	2.053387	2.053396
147181	-1.147191	-1.642024	-1.642028	2.003065	2.003073
091516	-1.091525	-1.618861	-1.618865	1.952464	1.952473
035413	-1.035423	-1.595050	-1.595054	1.901648	1.901657
978897	-0.978906	-1.570601	-1.570606	1.850683	1.850692
921989	-0.921998	-1.545524	-1.545529	1.799641	1.799650
864712	-0.864722	-1.519829	-1.519833	1.748601	1.748610
807089	-0.807099	-1.493525	-1.493530	1.697649	1.697658
749144	-0.749154	-1.466625	-1.466630	1.646877	1.646887
690898	-0.690909	-1.439138	-1.439143	1.596389	1.596398
632377	-0.632387	-1.411075	-1.411080	1.546296	1.546306
573602	-0.573613	-1.382447	-1.382453	1.496723	1.496731
514898	-0.514609	-1.353267	-1.353273	1.447807	1.447814
455389	-0.455399	-1.323546	-1.323552	1.399697	1.399706
395997	-0.396008	-1.293295	-1.293301	1.352562	1.352572
336446	-0.336457	-1.262527	-1.262533	1.306587	1.306596
276761	-0.276773	-1.231253	-1.231260	1.261976	1.261984
216966	-0.216977	-1.199488	-1.199494	1.218953	1.218961
157083	-0.157095	-1.167242	-1.167249	1.177765	1.177773
097138	-0.097150	-1.134530	-1.134537	1.138681	1.138689
037154	-0.037166	-1.101364	-1.101371	1.101990	1.101997
22844	0.022832	-1.067757	-1.067764	1.068001	1.068008
082833	0.082822	-1.033723	-1.033731	1.037037	1.037043
142790	0.142778	-0.999276	-0.999283	1.009427	1.009433

REC	X FCT	Y REC	Y FCT	R REC	R FCT
202690	0.202678	-0.964429	-0.964437	0.985498	0.985503
262508	0.262496	-0.929196	-0.929204	0.965566	0.965570
222222	0.322210	-0.893592	-0.893600	0.949913	0.949918
381806	0.381794	-0.857630	-0.857638	0.938779	0.938784
441238	0.441226	-0.821325	-0.821333	0.932345	0.932346
500493	0.500481	-0.784692	-0.784700	0.930718	0.930719
559549	0.559536	-0.747745	-0.747753	0.933925	0.933926
618380	0.618366	-0.710499	-0.710507	0.941914	0.941912
676982	0.676968	-0.672968	-0.672976	0.954551	0.954548
735277	0.735263	-0.635168	-0.635177	0.971634	0.971630
793296	0.793284	-0.597115	-0.597123	0.992908	0.992909
850998	0.850986	-0.558822	-0.558831	1.018077	1.018071
908360	0.908347	-0.520306	-0.520315	1.046822	1.046815
965358	0.965344	-0.481582	-0.481591	1.078813	1.078806
021970	1.021957	-0.442685	-0.442674	1.113721	1.113713
078173	1.078160	-0.403571	-0.403580	1.151228	1.151220
133945	1.133932	-0.364316	-0.364325	1.191032	1.191023
189263	1.189251	-0.324915	-0.324924	1.232849	1.232840
244106	1.244094	-0.285384	-0.285393	1.276418	1.276408
298451	1.298439	-0.245738	-0.245748	1.321500	1.321490
352277	1.352264	-0.205995	-0.206004	1.367877	1.367866
405562	1.405549	-0.166169	-0.166179	1.415350	1.415339
459224	1.458272	-0.126277	-0.126286	1.463742	1.463730
510424	1.510411	-0.086334	-0.086343	1.512889	1.512877
561959	1.561946	-0.046357	-0.046366	1.562647	1.562634
612869	1.612857	-0.006361	-0.006370	1.612882	1.612869
663135	1.663122	0.033637	0.033627	1.663475	1.663462
712735	1.712722	0.073622	0.073612	1.714316	1.714304
761650	1.761637	0.113577	0.113568	1.765307	1.765294
809563	1.809848	0.153487	0.153478	1.816357	1.816344
857346	1.857334	0.193336	0.193326	1.867382	1.867369
904077	1.904078	0.233107	0.233098	1.918306	1.918293
950072	1.950060	0.272786	0.272776	1.969059	1.969046
995274	1.995262	0.312355	0.312345	2.019575	2.019562
039677	2.039286	0.351799	0.351789	2.069794	2.069781
083265	2.083254	0.391102	0.391092	2.119659	2.119646
126020	2.126009	0.430249	0.430239	2.169119	2.169106
167924	2.167913	0.469214	0.469214	2.218123	2.218109
208962	2.208950	0.508011	0.508001	2.266625	2.266611
249115	2.249104	0.546585	0.546585	2.314581	2.314566
288369	2.288358	0.584960	0.584951	2.361951	2.361938
326708	2.326697	0.623082	0.623082	2.408695	2.408682
364116	2.364105	0.660974	0.660964	2.454777	2.454764
400578	2.400566	0.698582	0.698582	2.500161	2.500148
436081	2.436070	0.735930	0.735920	2.544815	2.544802
470608	2.470596	0.772964	0.772964	2.588703	2.588690
504148	2.504136	0.809699	0.809699	2.631803	2.631790
536686	2.536676	0.846120	0.846110	2.674078	2.674065
568209	2.568199	0.882192	0.882183	2.715504	2.715492
598705	2.598681	0.917912	0.917902	2.756054	2.756041
628162	2.628152	0.953264	0.953255	2.795702	2.795690
656567	2.656558	0.988235	0.988226	2.834424	2.834412
683910	2.683901	1.022811	1.022802	2.872197	2.872184
710179	2.710170	1.056978	1.056969	2.908999	2.908986
735356	2.735356	1.090722	1.090713	2.944808	2.944797
759456	2.759447	1.124030	1.124021	2.979604	2.979593
782443	2.782435	1.156879	1.156879	3.013367	3.013356
804318	2.804309	1.189283	1.189274	3.046078	3.046067
825070	2.825061	1.221203	1.221194	3.077720	3.077709
844693	2.844685	1.252634	1.252625	3.108275	3.108264
863370	2.863370	1.283564	1.283556	3.137716	3.137705

REC	XFCT	YREC	YFCT	RREC	RFCT
880518	2.880510	1.313981	1.313973	3.166059	3.166049
896705	2.896698	1.343872	1.343864	3.193258	3.193248
911734	2.911727	1.373226	1.373218	3.219308	3.219298
925598	2.925592	1.402030	1.402022	3.244197	3.244180
938292	2.938286	1.430274	1.430266	3.267912	3.267902
949811	2.949805	1.457946	1.457937	3.290439	3.290430
960150	2.960144	1.485034	1.485026	3.311769	3.311760
969305	2.969299	1.511528	1.511520	3.331890	3.331881
977272	2.977266	1.537418	1.537410	3.350791	3.350783
984048	2.984043	1.562693	1.562685	3.368464	3.368456
989631	2.989626	1.587343	1.587335	3.384900	3.384892
994018	2.994013	1.611357	1.611350	3.400090	3.400082
997207	2.997202	1.634728	1.634721	3.414028	3.414020
999197	2.999193	1.657444	1.657437	3.426705	3.426698
999988	2.999984	1.679498	1.679491	3.438116	3.438109
999579	2.999575	1.700879	1.700873	3.448255	3.448249
997970	2.997967	1.721581	1.721574	3.457118	3.457112
995162	2.995159	1.741594	1.741587	3.464700	3.464694
991156	2.991153	1.760910	1.760903	3.470996	3.470991
985953	2.985951	1.779521	1.779515	3.476006	3.476000
979556	2.979554	1.797422	1.797416	3.479724	3.479720
971968	2.971966	1.814603	1.814597	3.482151	3.482147
963190	2.963189	1.831058	1.831052	3.483284	3.483280
953228	2.953226	1.846781	1.846775	3.483124	3.483120
942084	2.942083	1.861765	1.861760	3.481670	3.481667
929763	2.929762	1.876004	1.875999	3.478923	3.478920
916270	2.916270	1.889494	1.889489	3.474884	3.474881
901611	2.901611	1.902227	1.902222	3.469556	3.469553
885792	2.885792	1.914199	1.914195	3.462940	3.462938
868818	2.868819	1.925406	1.925402	3.455041	3.455039
850696	2.850697	1.935843	1.935839	3.445861	3.445860
831435	2.831436	1.945505	1.945501	3.435406	3.435405
811040	2.811042	1.954389	1.954386	3.423680	3.423680
789522	2.789524	1.962492	1.962488	3.410690	3.410690
766887	2.766890	1.969809	1.969806	3.396442	3.396442
743146	2.743149	1.976339	1.976336	3.380942	3.380942
718308	2.718311	1.982078	1.982075	3.364199	3.364200
692382	2.692386	1.987024	1.987022	3.346220	3.346222
665380	2.665384	1.991176	1.991173	3.327016	3.327019
637311	2.637315	1.994531	1.994529	3.306594	3.306596
608188	2.608192	1.997088	1.997086	3.284967	3.284969
578021	2.578026	1.998847	1.998845	3.262144	3.262146
546823	2.546828	1.999806	1.999804	3.238137	3.238140
514606	2.514612	1.999965	1.999963	3.212959	3.212963
481384	2.481390	1.999324	1.999323	3.186622	3.186626
447169	2.447175	1.997883	1.997882	3.159141	3.159146
411975	2.411982	1.995643	1.995643	3.130530	3.130534
375816	2.375823	1.992605	1.992605	3.100803	3.100808
338708	2.338715	1.988770	1.988770	3.069977	3.069983
300663	2.300671	1.984140	1.984140	3.038069	3.038075
264699	2.261707	1.978716	1.978716	3.005095	3.005103
221830	2.221838	1.972500	1.972501	2.971075	2.971081
181072	2.181080	1.965496	1.965496	2.936026	2.936033
139441	2.139450	1.957705	1.957706	2.899969	2.899976
96955	2.096964	1.949131	1.949132	2.862924	2.862931
53630	2.053640	1.939778	1.939779	2.824913	2.824921
009484	2.009494	1.929648	1.929650	2.785959	2.785968
964534	1.964544	1.918747	1.918749	2.746086	2.746095
918798	1.918809	1.907079	1.907081	2.705316	2.705325

ANNEXE IV

Génération de la courbe

$$x(t) = 0,2 \cdot e^{0,01 \cdot t} + 2 \cdot \cos 5t$$

$$y(t) = e^{-0,05 \cdot t} + 1,5 \cdot \sin 6t \quad \text{à } T = 0,02$$

après identification sur un intervalle de 60 périodes.

XREC	XFCT	YREC	YFCT	RREC	RFCT
2.200000	2.200000	1.000000	1.000000	2.416609	2.416609
2.190048	2.190048	1.178568	1.178568	2.487033	2.487033
2.160213	2.160213	1.354555	1.354555	2.549773	2.549773
2.110793	2.110793	1.525415	1.525415	2.604292	2.604292
2.042282	2.042282	1.688676	1.688676	2.650008	2.650008
1.955365	1.955365	1.841976	1.841976	2.686322	2.686322
1.850911	1.850911	1.983094	1.983094	2.712662	2.712662
1.729964	1.729964	2.109989	2.109989	2.728521	2.728521
1.593733	1.593733	2.220819	2.220819	2.733500	2.733500
1.443580	1.443580	2.313976	2.313977	2.727345	2.727345
1.281004	1.281005	2.388108	2.388108	2.709987	2.709988
1.107632	1.107632	2.442132	2.442132	2.681578	2.681578
0.925195	0.925196	2.475258	2.475259	2.642516	2.642517
0.735518	0.735518	2.486996	2.486996	2.593479	2.593480
0.540494	0.540495	2.477161	2.477162	2.535441	2.535442
0.342074	0.342075	2.445882	2.445883	2.469687	2.469688
0.142241	0.142242	2.393594	2.393595	2.397817	2.397818
0.057008	-0.057007	2.321035	2.321036	2.321735	2.321736
0.253683	-0.253682	2.229234	2.229236	2.243622	2.243624
0.445818	-0.445817	2.119498	2.119500	2.165878	2.165879
0.631492	-0.631492	1.993391	1.993393	2.091026	2.091026
0.808851	-0.808850	1.852712	1.852714	2.021579	2.021581
0.976121	-0.976120	1.699471	1.699474	1.959851	1.959852
1.131631	-1.131629	1.535858	1.535861	1.907734	1.907735
1.273826	-1.273825	1.364211	1.364214	1.866469	1.866470
1.401286	-1.401284	1.186986	1.186989	1.836447	1.836448
1.512736	-1.512734	1.006717	1.006721	1.817099	1.817100
1.607062	-1.607061	0.825984	0.825988	1.806903	1.806904
1.683323	-1.683321	0.647371	0.647375	1.803515	1.803516

XREC	XECT	YREC	YECT	RREC	RRECT
0.740754	-1.740754	0.473434	0.473438	1.803986	1.803985
0.778781	-1.778781	0.306660	0.306664	1.805023	1.805022
0.797026	-1.797026	0.149433	0.149439	1.803230	1.803229
0.795307	-1.795305	0.004003	0.004008	1.795211	1.795209
0.773637	-1.773635	-0.127554	-0.127548	1.778217	1.778215
0.732231	-1.732231	-0.243360	-0.243355	1.749245	1.749242
0.671300	-1.671300	-0.341763	-0.341758	1.706092	1.706088
0.592071	-1.592071	-0.421362	-0.421356	1.646889	1.646886
0.494716	-1.494716	-0.481025	-0.481020	1.570211	1.570207
0.330411	-1.380409	-0.519909	-0.519903	1.475073	1.475069
0.250300	-1.250298	-0.537468	-0.537462	1.360927	1.360921
0.105682	-1.105680	-0.533462	-0.533457	1.227646	1.227642
0.948002	-0.948001	-0.507965	-0.507960	1.075517	1.075513
0.778836	-0.778834	-0.461356	-0.461350	0.905226	0.905222
0.599872	-0.599871	-0.394319	-0.394314	0.717868	0.717864
0.412899	-0.412898	-0.307832	-0.307827	0.515021	0.515017
0.219784	-0.219783	-0.203153	-0.203149	0.299293	0.299289
0.022457	-0.022456	-0.081802	-0.081798	0.084829	0.084824
0.177110	0.177111	0.054462	0.054466	0.185295	0.185297
0.376926	0.376927	0.203667	0.203670	0.428431	0.428434
0.574993	0.574994	0.363652	0.363655	0.680338	0.680340
0.769333	0.769334	0.532103	0.532106	0.935418	0.935420
0.958005	0.958005	0.706583	0.706585	1.190392	1.190394
0.139124	1.139124	0.884568	0.884570	1.442243	1.442244
0.310879	1.310879	1.063486	1.063488	1.688019	1.688020
0.471557	1.471557	1.240750	1.240751	1.924822	1.924823
0.619551	1.619551	1.413795	1.413797	2.149829	2.149830
0.753384	1.753384	1.580121	1.580122	2.360326	2.360326
0.871719	1.871719	1.737320	1.737321	2.553745	2.553745
0.973372	1.973372	1.883118	1.883119	2.727698	2.727698
0.057331	2.057330	2.015406	2.015406	2.880013	2.880012
0.122756	2.122754	2.132265	2.132266	3.008762	3.008761
0.168993	2.168991	2.232003	2.232004	3.112293	3.112293
0.195580	2.195579	2.313172	2.313172	3.189253	3.189253
0.202254	2.202253	2.374589	2.374590	3.238610	3.238610
0.188947	2.188946	2.415359	2.415359	3.259670	3.259670
0.155793	2.155792	2.434881	2.434882	3.252090	3.252090
0.103123	2.103122	2.432862	2.432863	3.215890	3.215890
0.031465	2.031464	2.409316	2.409317	3.151453	3.151453
0.941534	1.941533	2.364569	2.364571	3.059533	3.059534
0.834230	1.834229	2.299252	2.299254	2.941251	2.941252
0.710624	1.710624	2.214289	2.214292	2.798091	2.798093
0.571954	1.571953	2.110890	2.110894	2.631900	2.631902
0.419603	1.419603	1.990529	1.990533	2.444889	2.444892
0.255096	1.255096	1.854923	1.854927	2.239644	2.239648
0.080076	1.080076	1.706009	1.706014	2.019166	2.019170
0.896292	0.896293	1.545916	1.545921	1.786951	1.786956
0.705582	0.705583	1.376932	1.376938	1.547187	1.547192
0.509850	0.509851	1.201476	1.201482	1.305178	1.305185
0.311013	0.311055	1.022056	1.022063	1.068341	1.068349
0.111171	0.111181	0.841241	0.841249	0.848556	0.848564
0.087776	-0.087774	0.661618	0.661626	0.667415	0.667422
0.283821	-0.283821	0.485756	0.485765	0.562597	0.562603
0.475005	-0.475002	0.316173	0.316182	0.570610	0.570611
0.659409	-0.659405	0.155293	0.155303	0.677448	0.677447
0.835188	-0.835188	0.005418	0.005423	0.835210	0.835201
0.000598	-1.000594	-0.131309	-0.131299	1.009177	1.009172
0.153974	-1.153970	-0.252937	-0.252927	1.181370	1.181363
0.293782	-1.293782	-0.357729	-0.357719	1.342332	1.342325
0.444191	-1.444191	-0.444191	-0.444180	1.486554	1.486551

REC	XFCT	YREC	YFCT	RREC	RFCT
0527283	-1.527278	-0.511092	-0.511081	1.610531	1.610522
0618633	-1.618627	-0.557483	-0.557473	1.711946	1.711938
0691775	-1.691769	-0.582710	-0.582700	1.789317	1.789308
0745978	-1.745973	-0.586424	-0.586414	1.841829	1.841820
0780701	-1.780695	-0.568585	-0.568575	1.869274	1.869266
0795596	-1.795590	-0.529461	-0.529451	1.872029	1.872021
0790513	-1.790508	-0.469629	-0.469619	1.851078	1.851070
0765504	-1.765498	-0.389962	-0.389953	1.808058	1.808051
0720817	-1.720811	-0.291619	-0.291611	1.745352	1.745345
0656899	-1.656894	-0.176028	-0.176021	1.666223	1.666217
0574388	-1.574383	-0.044865	-0.044858	1.575027	1.575021
0474108	-1.474103	0.099971	0.099977	1.477494	1.477489
0357060	-1.357055	0.256385	0.256390	1.381067	1.381063
0224414	-1.224409	0.422113	0.422118	1.295133	1.295130
0077494	-1.077490	0.594758	0.594763	1.230744	1.230743
0917769	-0.917765	0.771826	0.771830	1.199173	1.199172
0786833	-0.746829	0.950755	0.950758	1.209006	1.209006
0566394	-0.566391	1.128960	1.128962	1.263073	1.263074
0378255	-0.378252	1.303864	1.303866	1.357623	1.357624
0184295	-0.184293	1.472939	1.472941	1.484424	1.484425
0013548	0.013549	1.633741	1.633742	1.633797	1.633798
0213298	0.213299	1.783943	1.783944	1.796649	1.796650
0412960	0.412961	1.921372	1.921373	1.965250	1.965251
0610539	0.610539	2.044040	2.044040	2.133274	2.133274
0804062	0.804061	2.150168	2.150168	2.295591	2.295591
0991594	0.991593	2.238217	2.238217	2.448035	2.448035
0171263	1.171262	2.306909	2.306909	2.587216	2.587216
0341274	1.341273	2.355242	2.355242	2.710384	2.710384
099929	1.499927	2.382509	2.382509	2.815339	2.815339
0645643	1.645640	2.388304	2.388305	2.900368	2.900368
0776960	1.776957	2.372531	2.372532	2.964201	2.964201
0892568	1.892565	2.335405	2.335407	3.005983	3.005982
0991314	1.991311	2.277446	2.277449	3.025243	3.025242
0072210	2.072207	2.199476	2.199479	3.021879	3.021879
0134449	2.134446	2.102603	2.102607	2.996133	2.996133
0177410	2.177406	1.988208	1.988213	2.948573	2.948574
0200663	2.200659	1.857923	1.857928	2.880069	2.880069
0203976	2.203973	1.713609	1.713616	2.791768	2.791769
0187318	2.187314	1.557330	1.557338	2.685077	2.685078
0150854	2.150851	1.391320	1.391329	2.561630	2.561632
0094950	2.094947	1.217955	1.217965	2.423269	2.423271
0020164	2.020161	1.039715	1.039726	2.272020	2.272022
0927245	1.927242	0.859152	0.859163	2.110074	2.110077
0817120	1.817118	0.678848	0.678861	1.939784	1.939786
0690891	1.690890	0.501387	0.501400	1.763661	1.763661
0549820	1.549819	0.329306	0.329320	1.584419	1.584421
0395315	1.395315	0.165068	0.165083	1.405045	1.405047
0228922	1.228923	0.011024	0.011039	1.228972	1.228972
0052304	1.052305	-0.130624	-0.130608	1.060380	1.060379
0867225	0.867227	-0.257851	-0.257835	0.904747	0.904744
0675535	0.675536	-0.368841	-0.368824	0.769670	0.769664
0479151	0.479154	-0.462008	-0.461992	0.665611	0.665601
0280033	0.280037	-0.536027	-0.536010	0.604767	0.604754
0080173	0.080178	-0.589843	-0.589826	0.595267	0.595251
0118431	-0.118425	-0.622697	-0.622680	0.633859	0.633841
0313796	-0.313790	-0.634127	-0.634111	0.707521	0.707503
0503969	-0.503963	-0.623982	-0.623966	0.802085	0.802068
0687050	-0.687043	-0.592421	-0.592405	0.907194	0.907178
0861209	-0.861200	-0.539909	-0.539894	1.016456	1.016441
0024704	-1.024696	-0.467215	-0.467201	1.126192	1.126178

X REC	X FCT	Y REC	Y FCT	R REC	R FCT
0.175903	-1.175094	-0.375396	-0.375383	1.234371	1.234358
0.313294	-1.313294	-0.265785	-0.265773	1.339919	1.339907
0.435504	-1.435503	-0.139972	-0.139960	1.442312	1.442300
0.541311	-1.541300	0.000222	0.000232	1.541311	1.541300
0.629657	-1.629646	0.152768	0.152778	1.636802	1.636792
0.699661	-1.699649	0.315460	0.315469	1.728688	1.728678
0.750621	-1.750609	0.485946	0.485954	1.816815	1.816806
0.782028	-1.782016	0.661761	0.661767	1.900924	1.900926
0.793568	-1.793556	0.840364	0.840369	1.980681	1.980673
0.785125	-1.785114	1.019174	1.019178	2.055575	2.055567
0.756734	-1.756723	1.195607	1.195610	2.125033	2.125026
0.708826	-1.708815	1.367112	1.367115	2.188398	2.188391
0.641731	-1.641721	1.531212	1.531214	2.244971	2.244964
0.556169	-1.556159	1.685534	1.685535	2.294055	2.294049
0.452994	-1.452984	1.827845	1.827846	2.334997	2.334991
0.333236	-1.333227	1.956087	1.956088	2.367234	2.367229
0.198093	-1.198084	2.068404	2.068403	2.390339	2.390335
0.048912	-1.048905	2.163166	2.163166	2.404060	2.404057
0.887185	-0.887179	2.239000	2.239000	2.408365	2.408362
0.714529	-0.714523	2.294803	2.294802	2.403471	2.403469
0.532667	-0.532661	2.329759	2.329758	2.389876	2.389875
0.343414	-0.343410	2.343353	2.343354	2.368383	2.368383
0.148664	-0.148660	2.335379	2.335380	2.340106	2.340107
0.049639	0.049642	2.335939	2.335940	2.306473	2.306474
0.249516	0.249518	2.255443	2.255445	2.269203	2.269205
0.448968	0.448969	2.184607	2.184610	2.230265	2.230268
0.646003	0.646003	2.094437	2.094440	2.191799	2.191803
0.838653	0.838652	1.986217	1.986222	2.156014	2.156018
0.024993	1.024991	1.861492	1.861498	2.125033	2.125037
0.203162	1.203160	1.722044	1.722051	2.100723	2.100727
0.371381	1.371377	1.569867	1.569875	2.084507	2.084510
0.527968	1.527964	1.407137	1.407146	2.077190	2.077194
0.671359	1.671355	1.236182	1.236193	2.078843	2.078846
0.800124	1.800118	1.059450	1.059462	2.088751	2.088752
0.912974	1.912968	0.879471	0.879484	2.105454	2.105454
0.008783	2.008777	0.698820	0.698834	2.126866	2.126865
0.086594	2.086588	0.520085	0.520100	2.150434	2.150431
0.145631	2.145624	0.345824	0.345839	2.173321	2.173317
0.185303	2.185296	0.178531	0.178547	2.192583	2.192578
0.205215	2.205207	0.020600	0.020618	2.205311	2.205304
0.205167	2.205160	-0.125707	-0.125689	2.208747	2.208739
0.185162	2.185155	-0.258301	-0.258282	2.200376	2.200366
0.145399	2.145392	-0.375285	-0.375266	2.177975	2.177965
0.086276	2.086270	-0.474988	-0.474969	2.139664	2.139654
0.008384	2.008378	-0.555989	-0.555970	2.083922	2.083912
0.912502	1.912497	-0.617135	-0.617116	2.009607	2.009596
0.799589	1.799584	-0.657557	-0.657538	1.915960	1.915949
0.670772	1.670768	-0.676687	-0.676668	1.802605	1.802594
0.527339	1.527336	-0.674260	-0.674242	1.669549	1.669538
0.370725	1.370723	-0.650324	-0.650306	1.517171	1.517162
0.202493	1.202492	-0.605235	-0.605218	1.346217	1.346208
0.024326	1.024327	-0.539653	-0.539637	1.157787	1.157779
0.838004	0.838006	-0.454533	-0.454517	0.953337	0.953331
0.645390	0.645392	-0.351111	-0.351096	0.734716	0.734711
0.448407	0.448411	-0.230886	-0.230873	0.504359	0.504353
0.249026	0.249031	-0.095599	-0.095587	0.266745	0.266742
0.049237	0.049244	0.052790	0.052801	0.072188	0.072201
0.148960	-0.148953	0.212139	0.212149	0.259215	0.259218
0.343588	-0.343579	0.380143	0.380152	0.512408	0.512408
0.532700	-0.532690	0.554373	0.554381	0.768830	0.768825

X REC.	X FCT	Y REC	Y FCT	R REC	R FCT
0.114406	-0.714395	0.732313	0.732319	1.023064	1.023060
0.886891	-0.886878	0.911390	0.911395	1.271695	1.261690
1.048430	-1.048416	1.089019	1.089022	1.511677	1.511670
1.197409	-1.197394	1.262631	1.262634	1.740123	1.740115
1.332339	-1.332324	1.429720	1.429721	1.954284	1.954275
1.451872	-1.451857	1.587869	1.587870	2.151571	2.151561
1.554812	-1.554795	1.734793	1.734793	2.329581	2.329570
1.640131	-1.640113	1.868366	1.868366	2.486126	2.486114
1.706976	-1.706958	1.986657	1.986657	2.619270	2.619258
1.754678	-1.754660	2.087952	2.087951	2.727351	2.727338
1.782761	-1.782742	2.170783	2.170782	2.809010	2.808997
1.790943	-1.790925	2.233947	2.233946	2.863214	2.863202
1.779143	-1.779124	2.276523	2.276522	2.889275	2.889263
1.747477	-1.747459	2.297888	2.297888	2.886861	2.886850
1.696262	-1.696244	2.297724	2.297724	2.856018	2.856008
1.520009	-1.520002	2.276020	2.276021	2.797173	2.797164
1.537420	-1.537404	2.233078	2.233080	2.711143	2.711136
1.431378	-1.431364	2.169504	2.169506	2.599152	2.599146
1.308946	-1.308931	2.086200	2.086204	2.462838	2.462833
1.171342	-1.171329	1.984353	1.984359	2.304279	2.304277
1.019944	-1.019932	1.865417	1.865424	2.126045	2.126045
0.856263	-0.856251	1.731091	1.731099	1.931285	1.931288
0.631234	-0.681924	1.583295	1.583305	1.723908	1.723917
0.498698	-0.498689	1.424144	1.424156	1.508936	1.508944
0.308386	-0.308379	1.255916	1.255929	1.293223	1.293234
0.112900	-0.112898	1.081017	1.081032	1.086897	1.086911
0.085808	0.085812	0.901953	0.901969	0.906026	0.906042
0.285754	0.285757	0.721288	0.721306	0.775830	0.775847
0.484940	0.484942	0.541609	0.541628	0.726985	0.727000
0.681375	0.681375	0.365988	0.365988	0.773210	0.773219
0.873093	0.873097	0.195448	0.195469	0.894707	0.894710
1.058194	1.058191	0.033922	0.033944	1.058737	1.058735
1.234813	1.234808	-0.116776	-0.116753	1.240322	1.240316
1.401191	1.401185	-0.254493	-0.254469	1.424115	1.424105
1.555666	1.555660	-0.377257	-0.377232	1.600756	1.600744
1.696696	1.696688	-0.483315	-0.483290	1.764191	1.764177
1.822871	1.822862	-0.577115	-0.577126	1.910254	1.910239
1.932931	1.932921	-0.639516	-0.639491	2.035977	2.035960
2.025776	2.025766	-0.687435	-0.687410	2.139238	2.139220
2.100481	2.100470	-0.714232	-0.714207	2.218591	2.218574
2.156298	2.156287	-0.719532	-0.719508	2.273180	2.273162
2.192670	2.192659	-0.703269	-0.703246	2.302692	2.302675
2.208135	2.209224	-0.665690	-0.665668	2.307350	2.307333
2.205827	2.205816	-0.607346	-0.607325	2.287912	2.287895
2.162880	2.162870	-0.529087	-0.529067	2.245697	2.245682
2.139429	2.139419	-0.432050	-0.432032	2.182619	2.182605
2.077104	2.077092	-0.317642	-0.317625	2.101252	2.101240
1.996128	1.996119	-0.187519	-0.187503	2.004917	2.004907
1.897311	1.897303	-0.043564	-0.043550	1.897811	1.897803
1.781639	1.781633	0.112140	0.112152	1.785165	1.785160
1.650271	1.650268	0.277345	0.277356	1.673414	1.673411
1.504518	1.504514	0.449662	0.449671	1.570277	1.570276
1.345837	1.345835	0.626603	0.626610	1.484557	1.484556
1.175815	1.175814	0.805611	0.805616	1.425324	1.425323
0.996149	0.996151	0.984099	0.984104	1.400274	1.400277
0.808637	0.808640	1.159492	1.159495	1.413618	1.413622
0.615152	0.615157	1.329253	1.329255	1.464693	1.464697
0.417628	0.417634	1.490932	1.490932	1.548319	1.548321
0.218038	0.218046	1.642191	1.642190	1.656602	1.656603
0.018377	0.018387	1.780843	1.780842	1.780938	1.780937

XREC	XFCY	YREC	YFCT	RREC	R FCT
0.179358	-0.179346	1.904885	1.904883	1.913310	1.913307
0.373179	-0.373179	2.012520	2.012518	2.046829	2.046824
0.561190	-0.561175	2.102189	2.102187	2.175806	2.175800
0.741470	-0.741453	2.172592	2.172591	2.295634	2.295627
0.912232	-0.912213	2.222706	2.222704	2.402622	2.402613
0.071769	-1.071747	2.251798	2.251797	2.493849	2.493840
0.218486	-1.218455	2.259440	2.259439	2.567056	2.567046
0.358917	-1.358896	2.245509	2.245510	2.620552	2.620541
0.467739	-1.467715	2.210197	2.210199	2.653155	2.653143
0.567788	-1.567758	2.153999	2.154003	2.664143	2.664131
0.650050	-1.650025	2.077714	2.077719	2.653217	2.653205
0.713717	-1.713691	1.982427	1.982433	2.620466	2.620454
0.758149	-1.758122	1.869498	1.869506	2.566342	2.566329
0.782899	-1.782877	1.740540	1.740550	2.491628	2.491616
0.787721	-1.787694	1.597398	1.597410	2.397421	2.397409
0.772566	-1.772540	1.442119	1.442133	2.285104	2.285092
0.737535	-1.737539	1.276926	1.276942	2.156326	2.156315
0.683127	-1.683102	1.104183	1.104201	2.012993	2.012981
0.609737	-1.609712	0.926365	0.926386	1.857257	1.857246
0.518145	-1.518122	0.746019	0.746041	1.691541	1.691529
0.409269	-1.409246	0.565726	0.565751	1.518580	1.518568
0.284194	-1.284172	0.388071	0.388097	1.341549	1.341536
0.144170	-1.144150	0.215596	0.215624	1.164305	1.164291
0.990596	-0.990578	0.050373	0.050802	0.991897	0.991879
0.825000	-0.824989	-0.104039	-0.104009	0.831540	0.831520
0.649054	-0.649039	-0.246625	-0.246594	0.694331	0.694305
0.466497	-0.466484	-0.374944	-0.374912	0.596943	0.596913
0.273150	-0.273169	-0.487162	-0.487129	0.558528	0.558494
0.077013	-0.077003	-0.581674	-0.581641	0.586751	0.586717
0.122043	0.122051	-0.657133	-0.657100	0.668370	0.668339
0.322002	0.322008	-0.712464	-0.712431	0.781851	0.781823
0.520865	0.520868	-0.746882	-0.746849	0.910567	0.910543
0.716645	0.716647	-0.759902	-0.759870	1.044525	1.044502
0.907388	0.907387	-0.751347	-0.751316	1.178081	1.178061
1.091186	1.091184	-0.721352	-0.721322	1.308066	1.308047
1.266205	1.266201	-0.670358	-0.670330	1.432709	1.432692
1.430696	1.430690	-0.599110	-0.599083	1.551072	1.551056
1.583016	1.583009	-0.508642	-0.508617	1.662726	1.662711
1.721643	1.721634	-0.400267	-0.400244	1.767560	1.767546
1.845193	1.845183	-0.275554	-0.275533	1.865655	1.865642
1.952432	1.952421	-0.136307	-0.136288	1.957184	1.957172
2.042286	2.042276	0.015460	0.015477	2.042347	2.042335
2.113865	2.113852	0.177554	0.177569	2.121308	2.121297
2.166446	2.166433	0.347634	0.347647	2.194160	2.194150
2.199509	2.199496	0.523242	0.523253	2.260890	2.260879
2.212722	2.212709	0.701843	0.701851	2.321362	2.321352
2.205954	2.205941	0.880856	0.880863	2.375319	2.375309
2.179273	2.179260	1.057698	1.057702	2.422387	2.422377
2.132934	2.132934	1.229813	1.229816	2.462093	2.462083
2.067437	2.067425	1.394716	1.394717	2.493898	2.493889
1.983400	1.983389	1.550024	1.550024	2.517231	2.517222
1.881675	1.881665	1.693494	1.693493	2.531526	2.531518
1.763280	1.763271	1.823051	1.823049	2.536271	2.536264
1.629397	1.629390	1.936822	1.936819	2.531050	2.531044
1.481365	1.481360	2.033160	2.033157	2.515588	2.515582
1.320664	1.320660	2.110665	2.110665	2.489794	2.489789
1.148898	1.148896	2.168222	2.168220	2.453804	2.453801
0.967786	0.967786	2.204984	2.204982	2.408021	2.408019
0.779137	0.779139	2.220414	2.220412	2.353145	2.353145
0.584130	0.584130	2.214280	2.214279	2.290212	2.290212

ANNEXE V

Interpolation de

$$x(t) = 1 - e^{-t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t$$

Identification réalisée à $T = 1$ sur l'intervalle $[0 ; 40]$.

Interpolation à $T' = \frac{T}{10}$

0E POINT = -0.000000
 1E POINT = 0.491674
 2E POINT = 0.933259

EMPS

VALEUR REELLE

VALEUR CALCULEE

3.00	1.042262	1.042262
4.00	1.025833	1.025833
5.00	1.004549	1.004549
6.00	0.998312	0.998312
7.00	0.998713	0.998713
8.00	0.999713	0.999713
9.00	1.000061	1.000061
10.00	1.000062	1.000062
11.00	1.000015	1.000015
12.00	0.999998	0.999998
13.00	0.999996	0.999996
14.00	0.999999	0.999999
15.00	1.000000	1.000000
16.00	1.000000	1.000000
17.00	1.000000	1.000000
18.00	1.000000	1.000000
19.00	0.999999	0.999999
20.00	0.999999	0.999999
21.00	1.000000	1.000000
22.00	1.000000	1.000000
23.00	1.000000	0.999999
24.00	1.000000	0.999999
25.00	1.000000	0.999999
26.00	1.000000	0.999999
27.00	1.000000	0.999999
28.00	1.000000	0.999999
29.00	1.000000	0.999999
30.00	1.000000	0.999999
31.00	1.000000	0.999999
32.00	1.000000	0.999999
33.00	1.000000	0.999999
34.00	1.000000	0.999999
35.00	1.000000	0.999999
36.00	1.000000	0.999999
37.00	1.000000	0.999999
38.00	1.000000	0.999999
39.00	1.000000	0.999999
40.00	1.000000	0.999999

CRITERE QUADRATIQUE = 0.19410442E-06

VECTEUR SOLUTION

0.41510117E-06
 -0.80788041E-06
 0.19410442E-06

COEF RECURRENCE

-0.13975322E 01
 0.53286748E 00
 -0.13533527E 00

NUMERATEUR TRANSFORMEE EN Z

-0.000000

0.491674

0.246129

1.000000

-1.397532

0.532867

-0.135335

P1=-0.39753220E 00

P2= 0.13533527E 00

DERNIER FACTEUR 0.10000000E 01 -0.10000000E 01

RECURRENCE INTERPOLATRICE

-2.800633

2.519364

-0.818730

0.000000

POLES EN T

1.000000

MOD= 0.367879 ARG= 1.000001

POLES EN T PRIME

1.000000

MOD= 0.904837 ARG= 0.100000

CONDITIONS INITIALES EN T

-0.000000

0.491674

0.933259

KS= 0

COEFFICIENTS DE LA COURBE

-0.999999

-0.999998

0.999999

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

-0.000000

0.009349

0.034932

0.073342

1E ECART= 0.00E 00

POINT = 0.121559

POINT = 0.176932

POINT = 0.237163

POINT = 0.300281

POINT = 0.364620

POINT = 0.428795

POINT = 0.491673

2E ECART= 0.47E-07

POINT = 0.552353

POINT = 0.610135

POINT = 0.664497

POINT = 0.715077

POINT = 0.761645

POINT = 0.804084

POINT = 0.842376

POINT = 0.876580

POINT = 0.906817

POINT = 0.933259

3E ECART=-0.17E-07

```
POINT = 0.956116
POINT = 0.975623
POINT = 0.992036
POINT = 1.005618
POINT = 1.016636
POINT = 1.025355
POINT = 1.032035
POINT = 1.036925
POINT = 1.040260
POINT = 1.042262
```

4E ECART= 0.71E-07

```
POINT = 1.043137
POINT = 1.043072
POINT = 1.042239
POINT = 1.040793
POINT = 1.038871
POINT = 1.036594
POINT = 1.034067
POINT = 1.031382
POINT = 1.028616
POINT = 1.025833
```

SE ECART=-0.44E-06

```
POINT = 1.023087
POINT = 1.020422
POINT = 1.017869
POINT = 1.015457
POINT = 1.013201
POINT = 1.011116
POINT = 1.009208
POINT = 1.007479
POINT = 1.005928
POINT = 1.004550
```

```
6E ECART=-0.10E-05
```

```
POINT = 1.003341
POINT = 1.002290
POINT = 1.001388
POINT = 1.000624
POINT = 0.999988
POINT = 0.999467
POINT = 0.999051
POINT = 0.998727
POINT = 0.998484
POINT = 0.998314
```

```
7E ECART=-0.16E-05
```

POINT	=	0.998204
POINT	=	0.998147
POINT	=	0.998134
POINT	=	0.998157
POINT	=	0.998210
POINT	=	0.998285
POINT	=	0.998378
POINT	=	0.998483
POINT	=	0.998597
POINT	=	0.998715

8E ECART=-0.22E-05

```
POINT = 0.998836
POINT = 0.998955
POINT = 0.999072
POINT = 0.999185
```

```
POINT = 0.999292
POINT = 0.999392
POINT = 0.999485
POINT = 0.999571
POINT = 0.999649
POINT = 0.999719
```

9E ECART=-0.29E-05

```
POINT = 0.999782
POINT = 0.999837
POINT = 0.999886
POINT = 0.999927
POINT = 0.999963
POINT = 0.999992
POINT = 1.000017
POINT = 1.000037
POINT = 1.000053
POINT = 1.000064
```

10E ECART=-0.33E-05

```
POINT = 1.000073
POINT = 1.000079
POINT = 1.000082
POINT = 1.000084
POINT = 1.000083
POINT = 1.000082
POINT = 1.000079
POINT = 1.000075
POINT = 1.000071
POINT = 1.000066
```

11E ECART=-0.38E-05

```
POINT = 1.000061
POINT = 1.000056
POINT = 1.000051
POINT = 1.000046
POINT = 1.000041
POINT = 1.000036
POINT = 1.000032
POINT = 1.000028
POINT = 1.000024
POINT = 1.000020
```

12E ECART=-0.41E-05

POINT = 1.000017
POINT = 1.000014
POINT = 1.000012
POINT = 1.000010
POINT = 1.000008
POINT = 1.000006
POINT = 1.000005
POINT = 1.000004
POINT = 1.000003
POINT = 1.000002

```
13E ECART=-0.45E-05
```

[illegible]

[illegible]


```

POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
36E ECART=-0.17E-04
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
37E ECART=-0.17E-04
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000017
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
38E ECART=-0.18E-04
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
39E ECART=-0.18E-04
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000018
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
40E ECART=-0.19E-04
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000019
POINT = 1.000020
41E ECART=-0.20E-04

```


ANNEXE VI

Interpolation de l'ellipse

$$x(t) = 3 \cdot \cos t$$

$$y(t) = 2 \cdot \sin (t+1)$$

Identification sur l'intervalle $[0 ; 40]$ à $T = 1$.

Interpolation à $T' = \frac{T}{10}$

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

3.000000

2.985012

1.682941

1.782415

1E ECART= 0.00E 00

POINT = 2.940200
 POINT = 2.866010
 POINT = 2.763184
 POINT = 2.632748
 POINT = 2.476007
 POINT = 2.294527
 POINT = 2.090120
 POINT = 1.864830
 POINT = 1.620906

2E ECART= 0.15E-06

POINT = 1.360787
 POINT = 1.087072
 POINT = 0.802494
 POINT = 0.509899
 POINT = 0.212209
 POINT = -0.087601
 POINT = -0.386537
 POINT = -0.681610
 POINT = -0.969873
 POINT = -1.248445

3E ECART= 0.45E-05

POINT = -1.514543
 POINT = -1.765508
 POINT = -1.998832
 POINT = -2.212185
 POINT = -2.403435
 POINT = -2.570670
 POINT = -2.712220
 POINT = -2.826670
 POINT = -2.912876
 POINT = -2.969978

4E ECART= 0.14E-05

POINT = -2.997405
 POINT = -2.994883
 POINT = -2.962437
 POINT = -2.900391
 POINT = -2.809365
 POINT = -2.690369
 POINT = -2.544293
 POINT = -2.372894
 POINT = -2.177787
 POINT = -1.960919

5E ECART=-0.11E-04

POINT = -1.724459
 POINT = -1.470768
 POINT = -1.202382
 POINT = -0.921982
 POINT = -0.632370
 POINT = -0.336440
 POINT = -0.037147
 POINT = 0.262515
 POINT = 0.559555
 POINT = 0.851005

6E ECART=-0.11E-04

1E ECART= 0.00E 00

POINT = 1.864078
 POINT = 1.927117
 POINT = 1.970900
 POINT = 1.994990
 POINT = 1.999147
 POINT = 1.983330
 POINT = 1.947695
 POINT = 1.892600
 POINT = 1.818594

2E ECART= 0.87E-07

POINT = 1.726418
 POINT = 1.616991
 POINT = 1.491409
 POINT = 1.350924
 POINT = 1.196941
 POINT = 1.030999
 POINT = 0.854756
 POINT = 0.669972
 POINT = 0.478494
 POINT = 0.282234

3E ECART= 0.50E-05

POINT = 0.083155
 POINT = -0.116754
 POINT = -0.315497
 POINT = -0.511088
 POINT = -0.701573
 POINT = -0.885047
 POINT = -1.059679
 POINT = -1.223722
 POINT = -1.375538
 POINT = -1.513611

4E ECART= 0.61E-05

POINT = -1.636559
 POINT = -1.743156
 POINT = -1.832336
 POINT = -1.903207
 POINT = -1.955063
 POINT = -1.987583
 POINT = -1.999847
 POINT = -1.999329
 POINT = -1.964903
 POINT = -1.917846

5E ECART=-0.25E-05

POINT = -1.851625
 POINT = -1.766904
 POINT = -1.664528
 POINT = -1.545521
 POINT = -1.411071
 POINT = -1.262523
 POINT = -1.101359
 POINT = -0.929192
 POINT = -0.747740
 POINT = -0.558816

6E ECART=-0.14E-04

POINT = 1.133951
POINT = 1.405568
POINT = 1.663140
POINT = 1.904095
POINT = 2.126024
POINT = 2.326711
POINT = 2.504151
POINT = 2.656569
POINT = 2.782444
POINT = 2.880517

7E ECART=-0.68E-05

POINT = 2.949809
POINT = 2.989628
POINT = 2.999575
POINT = 2.979551
POINT = 2.929757
POINT = 2.850689
POINT = 2.743138
POINT = 2.608178
POINT = 2.447158
POINT = 2.261687

8E ECART= 0.19E-04

POINT = 2.053618
POINT = 1.825029
POINT = 1.578206
POINT = 1.315613
POINT = 1.039876
POINT = 0.753748
POINT = 0.460089
POINT = 0.161833
POINT = -0.138040
POINT = -0.436533

9E ECART= 0.33E-04

POINT = -0.730666
POINT = -1.017497
POINT = -1.294162
POINT = -1.557896
POINT = -1.806064
POINT = -2.036187
POINT = -2.245964
POINT = -2.433301
POINT = -2.596324
POINT = -2.733406

10E ECART= 0.16E-04

POINT = -2.843177
POINT = -2.924539
POINT = -2.976681
POINT = -2.999080
POINT = -2.991513
POINT = -2.954056
POINT = -2.887083
POINT = -2.791263
POINT = -2.667553
POINT = -2.517190

11E ECART=-0.23E-04

POINT = -2.341676
POINT = -2.142765
POINT = -1.922444
POINT = -1.682914
POINT = -1.426570
POINT = -1.155971
POINT = -0.873822
POINT = -0.582942
POINT = -0.286238
POINT = 0.013325

12E ECART=-0.48E-04

POINT = -0.364310
POINT = -0.166163
POINT = 0.033643
POINT = 0.233114
POINT = 0.430256
POINT = 0.623098
POINT = 0.809715
POINT = 0.988242
POINT = 1.156894
POINT = 1.313987

7E ECART=-0.14E-04

POINT = 1.457951
POINT = 1.587347
POINT = 1.700883
POINT = 1.797425
POINT = 1.876007
POINT = 1.935845
POINT = 1.976340
POINT = 1.997088
POINT = 1.997882
POINT = 1.978714

8E ECART= 0.23E-05

POINT = 1.939775
POINT = 1.881454
POINT = 1.804334
POINT = 1.709186
POINT = 1.596961
POINT = 1.468778
POINT = 1.325921
POINT = 1.169815
POINT = 1.002021
POINT = 0.824214

9E ECART= 0.22E-04

POINT = 0.638173
POINT = 0.445755
POINT = 0.248883
POINT = 0.049525
POINT = -0.150328
POINT = -0.348679
POINT = -0.543547
POINT = -0.732983
POINT = -0.915096
POINT = -1.088065

10E ECART= 0.23E-04

POINT = -1.250163
POINT = -1.399770
POINT = -1.535390
POINT = -1.655669
POINT = -1.759406
POINT = -1.845563
POINT = -1.913279
POINT = -1.961879
POINT = -1.990876
POINT = -1.999981

11E ECART= 0.65E-06

POINT = -1.989102
POINT = -1.958349
POINT = -1.908029
POINT = -1.838645
POINT = -1.750889
POINT = -1.645639
POINT = -1.523946
POINT = -1.387026
POINT = -1.236248
POINT = -1.073117

12E ECART=-0.28E-04

x_n

POINT = 0.312757
POINT = 0.609063
POINT = 0.899283
POINT = 1.180519
POINT = 1.449959
POINT = 1.704911
POINT = 1.942828
POINT = 2.161333
POINT = 2.358243
POINT = 2.531590

13E ECART=-0.28E-04

POINT = 2.679642
POINT = 2.800920
POINT = 2.894212
POINT = 2.958586
POINT = 2.993398
POINT = 2.998301
POINT = 2.973247
POINT = 2.918484
POINT = 2.834561
POINT = 2.722315

14E ECART= 0.24E-04

POINT = 2.582869
POINT = 2.417616
POINT = 2.228207
POINT = 2.016534
POINT = 1.784713
POINT = 1.535059
POINT = 1.270067
POINT = 0.992385
POINT = 0.704788
POINT = 0.410148

15E ECART= 0.62E-04

POINT = 0.111411
POINT = -0.188439
POINT = -0.486407
POINT = -0.779515
POINT = -1.064834
POINT = -1.339513
POINT = -1.600809
POINT = -1.846110
POINT = -2.072965
POINT = -2.279108

16E ECART= 0.44E-04

POINT = -2.462478
POINT = -2.621244
POINT = -2.753819
POINT = -2.858879
POINT = -2.935374
POINT = -2.982540
POINT = -2.999905
POINT = -2.987296
POINT = -2.944838
POINT = -2.872957

17E ECART=-0.21E-04

POINT = -2.772370
POINT = -2.644082
POINT = -2.489375
POINT = -2.309796
POINT = -2.107137
POINT = -1.883425
POINT = -1.640893
POINT = -1.381967
POINT = -1.109232
POINT = -0.825415

18E ECART=-0.74E-04

 y_n

VI.3

POINT = -0.899264
POINT = -0.716426
POINT = -0.526429
POINT = -0.331173
POINT = -0.132608
POINT = 0.067282
POINT = 0.266500
POINT = 0.463055
POINT = 0.654984
POINT = 0.840368

13E ECART=-0.34E-04

POINT = 1.017355
POINT = 1.184178
POINT = 1.339168
POINT = 1.480778
POINT = 1.607592
POINT = 1.718344
POINT = 1.811927
POINT = 1.887405
POINT = 1.944025
POINT = 1.981221

14E ECART=-0.63E-05

POINT = 1.998621
POINT = 1.996051
POINT = 1.973537
POINT = 1.931305
POINT = 1.869775
POINT = 1.789564
POINT = 1.691471
POINT = 1.576478
POINT = 1.445733
POINT = 1.300542

15E ECART= 0.32E-04

POINT = 1.142357
POINT = 0.972758
POINT = 0.793440
POINT = 0.606193
POINT = 0.412890
POINT = 0.215461
POINT = 0.015880
POINT = -0.183860
POINT = -0.381763
POINT = -0.575852

16E ECART= 0.45E-04

POINT = -0.764187
POINT = -0.944886
POINT = -1.116144
POINT = -1.276251
POINT = -1.423605
POINT = -1.556735
POINT = -1.674311
POINT = -1.775157
POINT = -1.858267
POINT = -1.922809

17E ECART= 0.14E-04

POINT = -1.968139
POINT = -1.993804
POINT = -1.999548
POINT = -1.985313
POINT = -1.951241
POINT = -1.897673
POINT = -1.825144
POINT = -1.734378
POINT = -1.626283
POINT = -1.501939

18E ECART=-0.34E-04

x''

POINT = -0.533350
 POINT = -0.235956
 POINT = 0.063795
 POINT = 0.362909
 POINT = 0.658398
 POINT = 0.947307
 POINT = 1.226752
 POINT = 1.493939
 POINT = 1.746199
 POINT = 1.981012

19E ECART=-0.61E-04

POINT = 2.196031
 POINT = 2.389107
 POINT = 2.558313
 POINT = 2.701957
 POINT = 2.818603
 POINT = 2.907087
 POINT = 2.966524
 POINT = 2.996321
 POINT = 2.996179
 POINT = 2.966100

20E ECART= 0.13E-04

POINT = 2.906385
 POINT = 2.817630
 POINT = 2.700722
 POINT = 2.556830
 POINT = 2.387390
 POINT = 2.194096
 POINT = 1.978880
 POINT = 1.743891
 POINT = 1.491477
 POINT = 1.224161

21E ECART= 0.84E-04

POINT = 0.944614
 POINT = 0.655629
 POINT = 0.360092
 POINT = 0.060958
 POINT = -0.238785
 POINT = -0.536142
 POINT = -0.828143
 POINT = -1.111869
 POINT = -1.384485
 POINT = -1.643268

22E ECART= 0.81E-04

POINT = -1.885633
 POINT = -2.109156
 POINT = -2.311605
 POINT = -2.490958
 POINT = -2.645422
 POINT = -2.773453
 POINT = -2.873773
 POINT = -2.945379
 POINT = -2.987555
 POINT = -2.999881

23E ECART=-0.96E-06

POINT = -2.982233
 POINT = -2.934787
 POINT = -2.858018
 POINT = -2.752692
 POINT = -2.619863
 POINT = -2.460856
 POINT = -2.277261
 POINT = -2.070913
 POINT = -1.843872
 POINT = -1.598408

24E ECART=0.99E-04

 y''

POINT = -1.362588
 POINT = -1.209622
 POINT = -1.044571
 POINT = -0.869082
 POINT = -0.684909
 POINT = -0.493893
 POINT = -0.297942
 POINT = -0.099015
 POINT = 0.100901
 POINT = 0.299810

19E ECART=-0.56E-04

POINT = 0.495724
 POINT = 0.686684
 POINT = 0.870783
 POINT = 1.046181
 POINT = 1.211126
 POINT = 1.363970
 POINT = 1.503186
 POINT = 1.627382
 POINT = 1.735318
 POINT = 1.825915

20E ECART=-0.25E-04

POINT = 1.898268
 POINT = 1.951655
 POINT = 1.985540
 POINT = 1.999587
 POINT = 1.993655
 POINT = 1.967803
 POINT = 1.922288
 POINT = 1.857567
 POINT = 1.774286
 POINT = 1.673277

21E ECART= 0.34E-04

POINT = 1.555548
 POINT = 1.422278
 POINT = 1.274796
 POINT = 1.114576
 POINT = 0.943221
 POINT = 0.762440
 POINT = 0.574042
 POINT = 0.379908
 POINT = 0.181978
 POINT = -0.017769

22E ECART= 0.66E-04

POINT = -0.217339
 POINT = -0.414738
 POINT = -0.607993
 POINT = -0.795173
 POINT = -0.974408
 POINT = -1.143907
 POINT = -1.301977
 POINT = -1.447037
 POINT = -1.577639
 POINT = -1.692478

23E ECART= 0.37E-04

POINT = -1.790406
 POINT = -1.870445
 POINT = -1.931795
 POINT = -1.973843
 POINT = -1.996169
 POINT = -1.998550
 POINT = -1.980961
 POINT = -1.943580
 POINT = -1.886779
 POINT = -1.811126

24E ECART=-0.30E-04

VI - 4.

x_n y_n

VI.5

POINT = -1.336973
POINT = -1.062180
POINT = -0.776774
POINT = -0.483606
POINT = -0.185606
POINT = 0.114247
POINT = 0.412960
POINT = 0.707546
POINT = 0.995063
POINT = 1.272638

25E ECART=-0.10E-03

POINT = 1.537496
POINT = 1.786993
POINT = 2.018634
POINT = 2.230106
POINT = 2.419295
POINT = 2.584312
POINT = 2.723507
POINT = 2.835489
POINT = 2.919140
POINT = 2.973623

26E ECART=-0.15E-04

POINT = 2.998395
POINT = 2.993208
POINT = 2.958114
POINT = 2.893463
POINT = 2.799902
POINT = 2.678365
POINT = 2.530066
POINT = 2.356488
POINT = 2.159364
POINT = 1.940665

27E ECART= 0.92E-04

POINT = 1.702575
POINT = 1.447473
POINT = 1.177909
POINT = 0.896575
POINT = 0.606284
POINT = 0.309934
POINT = 0.010487
POINT = -0.289063
POINT = -0.585726
POINT = -0.876537

28E ECART= 0.12E-03

POINT = -1.158589
POINT = -1.429065
POINT = -1.685263
POINT = -1.924622
POINT = -2.144750
POINT = -2.343449
POINT = -2.518733
POINT = -2.668850
POINT = -2.792301
POINT = -2.887853

29E ECART= 0.35E-04

POINT = -2.954549
POINT = -2.991725
POINT = -2.999008
POINT = -2.976326
POINT = -2.923905
POINT = -2.842270
POINT = -2.732235
POINT = -2.594901
POINT = -2.431640
POINT = -2.244082

30E ECART=-0.90E-04

POINT = -1.717377
POINT = -1.606468
POINT = -1.479508
POINT = -1.337764
POINT = -1.182655
POINT = -1.015729
POINT = -0.838653
POINT = -0.653199
POINT = -0.461217
POINT = -0.264628

25E ECART=-0.75E-04

POINT = -0.065394
POINT = 0.134492
POINT = 0.333036
POINT = 0.528252
POINT = 0.718189
POINT = 0.900951
POINT = 1.074710
POINT = 1.237732
POINT = 1.388386
POINT = 1.525168

26E ECART=-0.52E-04

POINT = 1.646711
POINT = 1.751801
POINT = 1.839387
POINT = 1.908595
POINT = 1.958732
POINT = 1.989298
POINT = 1.999988
POINT = 1.990695
POINT = 1.961511
POINT = 1.912728

27E ECART= 0.23E-04

POINT = 1.844834
POINT = 1.758507
POINT = 1.654609
POINT = 1.534179
POINT = 1.398420
POINT = 1.248688
POINT = 1.086480
POINT = 0.913416
POINT = 0.731225
POINT = 0.541729

28E ECART= 0.82E-04

POINT = 0.346819
POINT = 0.148444
POINT = -0.051413
POINT = -0.250757
POINT = -0.447596
POINT = -0.639963
POINT = -0.825935
POINT = -1.003655
POINT = -1.171347
POINT = -1.327334

29E ECART= 0.67E-04

POINT = -1.470060
POINT = -1.598097
POINT = -1.710166
POINT = -1.805148
POINT = -1.882094
POINT = -1.940234
POINT = -1.978988
POINT = -1.997968
POINT = -1.99698
POINT = -1.976049

30E ECART=-0.13E-04

POINT = -2.034102
 POINT = -1.803797
 POINT = -1.555470
 POINT = -1.291601
 POINT = -1.014827
 POINT = -0.727913
 POINT = -0.433725
 POINT = -0.135204
 POINT = 0.164665
 POINT = 0.462893

31E ECART=-0.13E-03

POINT = 0.756494
 POINT = 1.042537
 POINT = 1.318163
 POINT = 1.580619
 POINT = 1.827281
 POINT = 2.055606
 POINT = 2.263550
 POINT = 2.448799
 POINT = 2.609879
 POINT = 2.744285

32E ECART=-0.58E-04

POINT = 2.351572
 POINT = 2.930366
 POINT = 2.979081
 POINT = 2.999621
 POINT = 2.989391
 POINT = 2.949291
 POINT = 2.879723
 POINT = 2.781331
 POINT = 2.655269
 POINT = 2.503587

33E ECART= 0.81E-04

POINT = 2.325919
 POINT = 2.124021
 POINT = 1.901901
 POINT = 1.660777
 POINT = 1.403060
 POINT = 1.131223
 POINT = 0.846233
 POINT = 0.556767
 POINT = 0.259688
 POINT = -0.039985

34E ECART= 0.15E-03

POINT = -0.332259
 POINT = -0.633144
 POINT = -0.924562
 POINT = -1.204982
 POINT = -1.473241
 POINT = -1.726780
 POINT = -1.963066
 POINT = -2.179737
 POINT = -2.374680
 POINT = -2.549765

35E ECART= 0.88E-04

POINT = -2.6691334
 POINT = -2.816139
 POINT = -2.901115
 POINT = -2.962083
 POINT = -2.993067
 POINT = -2.997286
 POINT = -2.989977
 POINT = -2.912196
 POINT = -2.825718
 POINT = -2.711005

36E ECART=-0.70E-04

POINT = -1.935369
 POINT = -1.875351
 POINT = -1.796596
 POINT = -1.699889
 POINT = -1.586197
 POINT = -1.456657
 POINT = -1.312562
 POINT = -1.155353
 POINT = -0.986599
 POINT = -0.807988

31E ECART=-0.87E-04

POINT = -0.621303
 POINT = -0.428411
 POINT = -0.231238
 POINT = -0.031754
 POINT = 0.168045
 POINT = 0.366167
 POINT = 0.560630
 POINT = 0.749491
 POINT = 0.930864
 POINT = 1.102936

32E ECART=-0.82E-04

POINT = 1.263987
 POINT = 1.412409
 POINT = 1.546719
 POINT = 1.665575
 POINT = 1.767788
 POINT = 1.852338
 POINT = 1.918381
 POINT = 1.965255
 POINT = 1.992493
 POINT = 1.999823

33E ECART= 0.51E-06

POINT = 1.987171
 POINT = 1.954664
 POINT = 1.902626
 POINT = 1.831578
 POINT = 1.742229
 POINT = 1.635473
 POINT = 1.512375
 POINT = 1.374166
 POINT = 1.222227
 POINT = 1.058076

34E ECART= 0.88E-04

POINT = 0.883353
 POINT = 0.699803
 POINT = 0.509262
 POINT = 0.313632
 POINT = 0.114868
 POINT = -0.085043
 POINT = -0.284104
 POINT = -0.480328
 POINT = -0.671751
 POINT = -0.856463

35E ECART= 0.98E-04

POINT = -1.032618
 POINT = -1.198454
 POINT = -1.352316
 POINT = -1.492567
 POINT = -1.618102
 POINT = -1.727571
 POINT = -1.819980
 POINT = -1.893210
 POINT = -1.948124
 POINT = -1.983572

36E ECART= 0.15E-04

x'_n

POINT = -2.569206
 POINT = -2.401735
 POINT = -2.210267
 POINT = -1.996715
 POINT = -1.763212
 POINT = -1.512092
 POINT = -1.245863
 POINT = -0.967186
 POINT = -0.678846
 POINT = -0.383722

37E ECART=-0.16E-03

POINT = -0.084764
 POINT = 0.215039
 POINT = 0.512695
 POINT = 0.805229
 POINT = 1.089716
 POINT = 1.363316
 POINT = 1.623294
 POINT = 1.867052
 POINT = 2.092155
 POINT = 2.296354

38E ECART=-0.11E-03

POINT = 2.477609
 POINT = 2.634108
 POINT = 2.764287
 POINT = 2.866847
 POINT = 2.940762
 POINT = 2.985294
 POINT = 2.999998
 POINT = 2.984727
 POINT = 2.939633
 POINT = 2.365167

39E ECART= 0.53E-04

POINT = 2.762073
 POINT = 2.631382
 POINT = 2.474398
 POINT = 2.292691
 POINT = 2.088077
 POINT = 1.862598
 POINT = 1.618510
 POINT = 1.358249
 POINT = 1.084417
 POINT = 0.799750

40E ECART= 0.17E-03

POINT = 0.507093
 POINT = 0.209368
 POINT = -0.090447
 POINT = -0.389360
 POINT = -0.684382
 POINT = -0.972566
 POINT = -1.251033
 POINT = -1.517000
 POINT = -1.767809
 POINT = -2.000955

41E ECART= 0.14E-03

 y'_n

POINT = -1.999202
 POINT = -1.994856
 POINT = -1.970578
 POINT = -1.926610
 POINT = -1.863393
 POINT = -1.781557
 POINT = -1.681920
 POINT = -1.565478
 POINT = -1.433394
 POINT = -1.286988

37E ECART=-0.87E-04

POINT = -1.127723
 POINT = -0.957190
 POINT = -0.777093
 POINT = -0.589232
 POINT = -0.395483
 POINT = -0.197783
 POINT = 0.001893
 POINT = 0.201551
 POINT = 0.399195
 POINT = 0.592850

38E ECART=-0.11E-03

POINT = 0.780581
 POINT = 0.960514
 POINT = 1.130849
 POINT = 1.289885
 POINT = 1.436033
 POINT = 1.567832
 POINT = 1.683966
 POINT = 1.783275
 POINT = 1.864765
 POINT = 1.927623

39E ECART=-0.33E-04

POINT = 1.971222
 POINT = 1.995124
 POINT = 1.999091
 POINT = 1.983084
 POINT = 1.947263
 POINT = 1.891986
 POINT = 1.817804
 POINT = 1.725459
 POINT = 1.615874
 POINT = 1.490143

40E ECART= 0.82E-04

POINT = 1.349524
 POINT = 1.195420
 POINT = 1.029372
 POINT = 0.853039
 POINT = 0.668183
 POINT = 0.476651
 POINT = 0.280355
 POINT = 0.081259
 POINT = -0.118648
 POINT = -0.317371

41E ECART= 0.12E-03

ANNEXE VII

Interpolation du profil d'aile après identification
en x et y à $T = 1$.

Interpolation à $T' = \frac{T}{10}$

1° Extrados

2° Bord d'attaque et intrados.

Extrados

12

en cm

12

en cm

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

1.494399
1.497823
1.514826
1.528191

1E ECART= 0.93E-09

POINT = 1.544841
POINT = 1.564820
POINT = 1.589171
POINT = 1.614919
POINT = 1.645051
POINT = 1.678500

2E ECART=-0.99E-06

POINT = 1.715138
POINT = 1.734762
POINT = 1.797105
POINT = 1.841840
POINT = 1.882589
POINT = 1.936949
POINT = 1.984506
POINT = 2.036860
POINT = 2.087644
POINT = 2.138540

3E ECART=-0.40E-04

POINT = 2.189295
POINT = 2.239721
POINT = 2.289700
POINT = 2.339172
POINT = 2.388123
POINT = 2.436566
POINT = 2.484520
POINT = 2.531989
POINT = 2.578937
POINT = 2.625275

RT=-0.17E-03

POINT = 2.673644
POINT = 2.715416
POINT = 2.758688
POINT = 2.800798
POINT = 2.839835
POINT = 2.877862
POINT = 2.910940
POINT = 2.941652
POINT = 2.968626
POINT = 2.991553

5E ECART=-0.45E-03

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

8.634400
8.554963
8.386359
8.293531

1E ECART= 0.00E 00

POINT = 8.077875
POINT = 7.949520
POINT = 7.804287
POINT = 7.640536
POINT = 7.457454

2E ECART=-0.54E-04

POINT = 7.255141
POINT = 7.034607
POINT = 6.797674
POINT = 6.546798
POINT = 6.284836
POINT = 6.014769
POINT = 5.739426
POINT = 5.461229
POINT = 5.181988
POINT = 4.902766

3E ECART=-0.32E-02

POINT = 4.623826
POINT = 4.344663
POINT = 4.064124
POINT = 3.780586
POINT = 3.492185
POINT = 3.197065
POINT = 2.893619
POINT = 2.580693
POINT = 2.257740
POINT = 1.924897

4E ECART=-0.56E-02

POINT = 1.582992
POINT = 1.233461
POINT = 0.878215
POINT = 0.519444
POINT = 0.159405
POINT = -0.199791
POINT = -0.556371
POINT = -0.909038
POINT = -1.257051
POINT = -1.600229

5E ECART=-0.87E-02

POINT =
 POINT = 3.024435
 POINT =
 POINT = 3.039472
 POINT =
 POINT = 3.036986
 POINT =
 POINT =
 POINT = 3.002385
 POINT =

ECART=-0.85E-03

POINT = 2.959556
 POINT =
 POINT = 2.900325
 POINT = 2.854040
 POINT =
 POINT = 2.776560
 POINT = 2.724949
 POINT = 2.667459
 POINT =
 POINT = 2.534349

ECART=-0.13E-02

POINT =
 POINT = 2.370541
 POINT = 2.258350
 POINT = 2.194787
 POINT =
 POINT = 1.991331
 POINT = 1.892173
 POINT = 1.766758
 POINT = 1.651317
 POINT = 1.550120

ECART=-0.19E-02

POINT = -1.938887
 POINT = -2.273707
 POINT = -2.605572
 POINT = -2.935364
 POINT = -3.263779
 POINT = -3.591162
 POINT = -3.917393
 POINT = -4.241841
 POINT = -4.563389
 POINT = -4.880532

6E ECART=-0.96E-02

POINT = -5.191534
 POINT = -5.494626
 POINT = -5.788219
 POINT = -6.071107
 POINT = -6.342624
 POINT = -6.602737
 POINT = -6.852062
 POINT = -7.091783
 POINT = -7.323490
 POINT = -7.548947

7E ECART=-0.83E-02

POINT = -7.769813
 POINT = -7.987354
 POINT = -8.202175
 POINT = -8.414020
 POINT = -8.621661
 POINT = -8.822895
 POINT = -9.014682
 POINT = -9.193384
 POINT = -9.355117
 POINT = -9.496171

8E ECART=-0.49E-02

Axe Y

Intrados

Axe X

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

1.528200
 1.056742
 0.637410
 0.264632

CONDITIONS INITIALES EN T PRIME

-9.501100
 -9.862060
 -10.142686
 -10.378386

1E ECART=-0.37E-03

POINT = -0.065585
 POINT = -0.360725
 POINT = -0.621768
 POINT = -0.853359
 POINT = -1.055636
 POINT = -1.240470
 POINT = -1.401400

2E ECART= 0.88E-03

POINT = -1.543681
 POINT = -1.759309
 POINT = -1.960337
 POINT = -2.137740
 POINT = -2.291231
 POINT = -2.413769
 POINT = -2.512613
 POINT = -2.58859
 POINT = -2.647004
 POINT = -2.685007

3E ECART= 0.77E-03

1E ECART= 0.00E 00

POINT = -10.351617
 POINT = -10.256084
 POINT = -10.113239
 POINT = -9.940920
 POINT = -9.752329
 POINT = -9.556198

2E ECART=-0.20E-03

POINT = -9.357549
 POINT = -9.158643
 POINT = -8.959892
 POINT = -8.760614
 POINT = -8.559594
 POINT = -8.355463
 POINT = -8.146927
 POINT = -7.932877
 POINT = -7.712430
 POINT = -7.484923

3E ECART=-0.76E-04

Y

POINT = -2.282225
 POINT = -2.310254
 POINT = -2.332538
 POINT = -2.349464
 POINT = -2.361367
 POINT = -2.368541
 POINT = -2.371247
 POINT = -2.369722
 POINT = -2.364180
 POINT = -2.354825

4E ECART= 0.25E-04

POINT = -2.341853
 POINT = -2.325457
 POINT = -2.305833
 POINT = -2.283179
 POINT = -2.257705
 POINT = -2.229626
 POINT = -2.199174
 POINT = -2.166588
 POINT = -2.132124
 POINT = -2.096050

5E ECART= 0.50E-04

POINT = -2.058643
 POINT = -2.020194
 POINT = -1.981000
 POINT = -1.941367
 POINT = -1.901601
 POINT = -1.862014
 POINT = -1.822911
 POINT = -1.784594
 POINT = -1.747355
 POINT = -1.711471

6E ECART= 0.71E-04

POINT = -1.677205
 POINT = -1.644798
 POINT = -1.614467
 POINT = -1.586402
 POINT = -1.560762
 POINT = -1.537674
 POINT = -1.517229
 POINT = -1.499478
 POINT = -1.484437
 POINT = -1.472080

7E ECART= 0.80E-04

POINT = -1.462339
 POINT = -1.455108
 POINT = -1.450240
 POINT = -1.447552
 POINT = -1.446822
 POINT = -1.447797
 POINT = -1.450191
 POINT = -1.453693
 POINT = -1.457969
 POINT = -1.462666

8E ECART= 0.66E-04

X

POINT = -7.249880
 POINT = -7.006984
 POINT = -6.756034
 POINT = -6.496920
 POINT = -6.229600
 POINT = -5.954089
 POINT = -5.670442
 POINT = -5.378759
 POINT = -5.079174
 POINT = -4.771861

4E ECART=-0.33E-03

POINT = -4.457031
 POINT = -4.134934
 POINT = -3.805859
 POINT = -3.470134
 POINT = -3.128126
 POINT = -2.780240
 POINT = -2.426920
 POINT = -2.068644
 POINT = -1.705928
 POINT = -1.339321

5E ECART=-0.77E-03

POINT = -0.969402
 POINT = -0.596784
 POINT = -0.222106
 POINT = 0.153963
 POINT = 0.530732
 POINT = 0.907483
 POINT = 1.283479
 POINT = 1.657962
 POINT = 2.030156
 POINT = 2.399272

6E ECART=-0.12E-02

POINT = 2.764504
 POINT = 3.125039
 POINT = 3.480052
 POINT = 3.828713
 POINT = 4.170186
 POINT = 4.503636
 POINT = 4.828225
 POINT = 5.143121
 POINT = 5.447495
 POINT = 5.740528

7E ECART=-0.16E-02

POINT = 6.021409
 POINT = 6.289340
 POINT = 6.543540
 POINT = 6.783243
 POINT = 7.007705
 POINT = 7.216203
 POINT = 7.408040
 POINT = 7.582544
 POINT = 7.739075
 POINT = 7.877022

9E ECART=-0.16E-02

ANNEXE VIII

Programmes de mise en oeuvre :

- ID08 : résolution d'un système symétrique, Méthode de Choleski.
- PSMOD : identification d'un système - Méthode du pseudo-modèle.
- ID10 : identification d'une courbe - Méthode du pseudo-modèle.
- ID11 : analyse et calcul des pôles d'une transformée en z pour l'interpolation. Détermination de la récurrence interpolatrice.
- ID12 : traitement des conditions initiales pour l'interpolation.
- Programme principal d'identification et d'interpolation des courbes.
- Programme de génération de courbes planes.


```
LOG DRIVE      CART SPEC      CART AVAIL      PHY DRIVE
0000           1130           1130           0000
```

```
M10  ACTUAL  8K  CONFIG  8K
```

```
// FOR
```

```
* ST SOURCE PROGRAM
```

```
* EXTENDED PRECISION
```

```
* ONE WORD INTEGERS
```

```
  SUBROUTINE IDOR (N,A,B,Y)
```

```
C  RESOLUTION DU SYSTEME SYMETRIQUE A*Y=B
```

```
C  PAR LA METHODE DE CHOLESKI
```

```
  DIMENSION A(9,9),B(9),Y(9)
```

```
  DIMENSION R(9,9),G(9)
```

```
  EPS=0.00001
```

```
  I=1
```

```
  J=1
```

```
  CALCUL DE LA MATRICE TRIANGLE R
```

```
  R(1,1)=A(1,1)
```

```
  IF(R(1,1)-EPS) 10,20,20
```

```
20 DO 2 J=2,N
```

```
  2 R(1,J)=A(1,J)/R(1,1)
```

```
  I=2
```

```
  R(2,1)=A(2,1)
```

```
  J=1
```

```
  K=1
```

```
  3 R(I,I)=R(I,I)-R(K,I)*R(K,I)
```

```
  I=I+1
```

```
11 R(I,I)=SQRT(-R(I,I))
```

```
  I=I+1
```

```
12 R(I,I)=SQRT(R(I,I))
```

```
13 IF(R(I,I)-EPS) 10,30,30
```

```
10 IDEP=I
```

```
  Y(IDEP)=0.
```

```
  Y(IDEP)=Y(IDEP)+A(IDEP)/R(IDEP)
```

```
102 FORMAT(10X,'LA VARIABLE Y(',I2,') EST DEPENDANTE '/')
```

```
  1 10X,'Y(',I2,')=',E10.3)
```

```
  DO 4 I=1,N
```

```
  4 Y(I)=0.
```

```
  GO TO 61
```

```
20 I2=I+1
```

```
  DO 6 J=I2,N
```

```
  R(I,J)=A(I,J)
```

```
  I=I+1
```

```
  7 R(I,J)=R(I,J)-R(K,I)*R(K,J)
```

```
  I=I+1
```

```
  IF(I-N) 40,50,50
```

```
  I=1
```

```
  GO TO 41
```

```
C  RESOLUTION DU PREMIER SYSTEME TRIANGULAIRE R*G=B
```

```
50 G(1)=R(1)/R(1,1)
```

```
  DO 8 I=2,N
```

```
  G(I)=R(I)
```

```
  I=I-1
```


PAGE . 2

```

      DO 81 K=1,I1
81  G(I)=G(I)-R(K,I)*G(K)
      G(I)=G(I)/R(I,I)
C  RESOLUTION DU SECOND SYSTEME TRIANGULAIRE RT*Y=G
      IK=N
      Y(IK)=G(IK)/R(IK,IK)
15  IK=IK-1
      Y(IK)=G(IK)
      JK=IK+1
      DO 9 J=JK,N
9    Y(IK)=Y(IK)-R(IK,J)*Y(J)
      Y(IK)=Y(IK)/R(IK,IK)
      IF(IK-1) 14,14,15
14  CONTINUE
      WRITE(3,100) Y(I1),Y(I1+1),Y(I1+2),Y(I1+3),Y(I1+4),Y(I1+5)
100  FORMAT(10X,'VECTEUR SOLUTION '/
1    8(15X,E15.8/))
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR IDC8
 COMMON C VARIABLES 288 PROGRAM 712

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0158 (HEX)

END OF COMPILATION

// *

PAGE 1

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
 000 1130 1130 0000

V2 X10 ACTUAL RK CONFIG RK

FOR

1 CS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK)

LIST SOURCE FWD 1A

PRECISION

WORD INTEGERS

NAME PSYOD

IDENTIFICATION PARAMETRIQUE D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE
 PAR LA METHODE DU PSEUDO-MODELE

DIMENSION DSCD(9,9),GRAD(9),Y(9),A(4)

DIMENSION ENT(100),E(5),S(5),R(9),ENT(150),SORT(150)

DATA(2,1130)=HARDWIT

DATA(12)=FWD1A

INITIALISATIONS

LECT=1

ENT(1)=0

ENT(2)=0

ENT(3)=0

ENT(4)=0

ENT(5)=0

ENT(6)=0

ENT(7)=0

ENT(8)=0

ENT(9)=0

ENT(10)=0

ENT(11)=0

ENT(12)=0

WRITE(3,200)

FOR AT(1,X)=-1 DO 1 ENTREE'20X'SORTIE SYSTEME'20X'SORTIE CALCULEE

*/ */

DO 2 I=1,9

GRAD(I)=0

DO 3 J=1,9

DSCD(I,J)=0

K=1

REPET DES ITERATIONS

T=TAU

ENT(K)=ENT(1)

K=1

ENT(K)=ENT(K-1)

S(K)=S(K-1)

K=K+1

IF(K-2) 10,20,20

ENT(1)=ENT(K)

IF(LECT) 20,70,70

CALL DATS(12,K,ENT)

PAGE 2

```

      GO TO (72, 73, 74)
72  SORT(KO)=RPNSE(T)
      GO TO 70
73  READ(2,102) SORT(KO)
102  FORMAT(F12.7)
      S(1)=SORT(KO)
      XSTAR=BT(1)+S(1)
      I=2, NH
      XSTAR=XSTAR-AT(I)-2*E(I)*S(I-1)
      ER=S(1)-XSTAR
      QUAD=QUAD+ER*ER

```

CLE 1 HAUTE--IMPRESSION DES DIFFERENTES FONCTIONS DU TEMPS

```

      CALL DATSW(1,KEY1)
      GO TO (31,30),KEY1
31  WRITE(3,106) T,E(1),S(1),XSTAR
106  FORMAT(9X,F8.3,15X,F12.7,17X,F12.7,22X,F12.7)
30  CONTINUE

```

CALCUL DU GRADIENT

```

      DO 4 I=1,NH
      GRAD(I)=GRAD(I)+2*E(I)*S(I+1)
      R(I)=S(I+1)
      I=NH+1
      DO 4 I=1,NH
      GRAD(N2)=GRAD(N2)-2*E(I)*S(I)
      R(N2)=S(I)

```

MATRICE DES DERIVEES SECONDES

```

      DO 5 I=1,N2
      DO 5 J=1,N2
      DSCD(I,J)=2*E(I)*E(J)
      IF(N-MAX) 11,12,12
11  N=N+1
      KO=KO+1
      GO TO 1
12  CONTINUE
      WRITE(3,103) QUAD
103  FORMAT(//10X,'CPITERE QUADRATIQUE =',E15.8//)

```

APPEL SOUS-PROGRAMME

```

      CALL ID08(N2,DSCD,GRAD,Y)
      RETOUR AU MAITRE-PROGRAMME

```

MODIFICATION DES COEFFICIENTS

```

      DO 6 I=1,NH
      AT(I)=BT(I)+Y(I)
      KY=NH+I
      BT(I)=BT(I)-Y(I)
      PT(N1)=BT(N1)-Y(N2)
      WRITE(3,104) (AT(I),I=1,NH)
104  FORMAT(10X,'RECURRENCE PREMIER MEMBRE ')

```



```

1      8(10X,E15.8//)
WRITE(3,105) (BT(I),I=1,N1)
105 FORMAT(10X,'RECURRENCE SECOND MEMBRE '//
1      8(10X,E15.8//))

```

CLE 0 BASSE--REFERENCE AU CRITERE POUR DECIDER DU PROCHAIN
INTERVALLE D'IDENTIFICATION

CLE 0 HAUTE--ITERATION SUR UN NOUVEL INTERVALLE
QUELLE QUE SOIT LA VALEUR DU CRITERE

```

CALL DATSW(3,KEY3)
GO TO (50,80),KEY3
80 IF(QUAD=0.1E-14) 50,60,60
50 N=N+1
MAX=N+NIT
LECT=1
DO 81 I=1,NH
41 A(I)=AT(I)
DO 51 I=1,N1
IT=NIT+1-I
ENT(I)=ENT(IT)
51 SORT(I)=SORT(IT)
KC=N1+1
GO TO 15
60 DO 61 I=1,N1
E(I)=ENT(I)
61 S(I)=SORT(I)
LECT=0
N=N+NIT
GO TO 15
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR PSMOD
COMMON 0 VARIABLES 1420 PROGRAM 966

END OF COMPILATION


```

XSTAR=0.
DO 8 I=2,N1
8 XSTAR=XSTAR-AT(I-1)*S(I)
ER=S(1)-XSTAR
QUAD=QUAD+ER*ER

```

CLE 1 HAUTE--IMPRESSION DU DETAIL DE LA COURBE IDENTIFIEE

```

CALL DATSW(1,KEY1)
GO TO (31,30) ,KEY1
31 WRITE(3,106) T,S(1),XSTAR,ER
106 FORMAT(10X,F5.2,21X,F11.6,22X,F11.6,22X,E9.2)
30 CONTINUE

```

CALCUL DU GRADIENT

```

DO 4 I=1,NH
GRAD(I)=GRAD(I)+2*ER*S(I+1)
4 R(I)=S(I+1)

```

MATRICE DES DERIVEES SECONDES

```

DO 5 I=1,NH
DO 5 J=1,NH
5 DSCD(I,J)=DSCD(I,J)+2*R(I)*R(J)
IF(N-MAX) 11,12,12
11 N=N+1
KO=KO+1
GO TO 1
12 CONTINUE

```

IMPRESSION DU CRITERE

```

WRITE(3,103) QUAD
WRITE(1,103) QUAD
103 FORMAT(//10X'CRITERE QUADRATIQUE ='E9.2 //)
PAUSE

```

CLE 2 HAUTE--AUGMENTATION DE UN DE L'ORDRE DE LA RECURRENCE

```

CALL DATSW(2,KEY2)
GO TO (1000,1001) ,KEY2
1000 NH=NH+1
GO TO 88
1001 CONTINUE

```

APPEL DU SOUS-PROGRAMME ID08
RESOLUTION DU SYSTEME SYMETRIQUE

```

CALL ID08(NH,DSCD,GRAD,Y)
DO 6 I=1,NH
6 AT(I)=AT(I)-Y(I)
WRITE(3,104) (AT(I),I=1,NH)
104 FORMAT(10X'COEF RECURRENCE'/8(10X,E15.8//))

```

CLE 0 HAUTE--PASSAGE IMMEDIAT A LA SUITE DU PROCESSUS

```

CALL DATSW(0,KEY0)

```


PAGE 3

```

      GO TO (50,2000),KEYO
2000 CONTINUE
      IF(QUAD=0.1E-12) 50,60,60
    60 LECT=0
      N=N-NIT
      WRITE(3,502)
    502 FORMAT(1H1)
      GO TO 15
    50 CONTINUE
      B(1)=X(1)
      DO 52 J=2,N1
      B(J)=X(J)
      K=J-1
      DO 51 I=1,K
      IJ=J-I
    51 B(J)=B(J)+AT(I)*X(IJ)
    52 CONTINUE
      WRITE(3,203) (B(J),J=1,NH)
    203 FORMAT(10X'NUMERATEUR TRANSFORMEE EN Z'/9(10X,F11.6/)///)
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR ID10
 COMMON 498 VARIABLES 408 PROGRAM 778

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0219 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*DELETE          ID10
CART ID 1130     DB ADDR 1E9F   DB CNT  0033

```

```

*STORE          WS  UA  ID10
CART ID 1130     DB ADDR 1FA3   DB CNT  0033

```

// *

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	1130	1130	0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE ID11

DIMENSION A(10),B(10),C(10),CS(9)

COMMON NH,NI,NR,IT,X(9),AT(9),AP(9),RO(4),TETA(4),BETA(9)

COMMON ROP(4),TETAP(4),GAMMA(9),SORT(100)

COMMON CK,CKP,TAU,NPOLE

SOUS-PROGRAMME ID11

CALCUL DES POLES EN T ET T'

CALCUL DE LA RECURRENCE INTERPOLATRICE

N=NH

CKP=1/CK

NI=0

NR=0

NPOLE=0

N1=N+1

IT=0

MMN=0

EPS=0.1E-06

A(1)=1.

DO 2 I=2,N1

2 A(I)=AT(I-1)

DO 3 I=1,9

AP(I)=0.

3 CS(I)=0.

P1=A(1)/A(1)

P2=A(N+1)/A(N-1)

NC=N

IF(N-2) 20,21,25

CAS DU PREMIER ORDRE

20 NR=1

BETA(1)=-A(2)

~~AP(1)=-GAMMA(1)~~

AP(1)=-GAMMA(1)

GO TO 400

CAS DU SECOND ORDRE

21 P1=A(2)

P2=A(3)

GO TO 5

ORDRE SUPERIEUR A 2--METHODE DE BAIRSTOW

25 MM=0


```

      IT=0
      NN=NC+1
      WRITE(3,205) (A(I),I=1,NN)
205  FORMAT(20X,F11.6)
      B(1)=A(1)
      B(2)=A(2)-P1*B(1)
      DO 23 I=3,NN
23   B(I)=A(I)-P1*B(I-1)-P2*B(I-2)
      C(1)=B(1)
      C(2)=B(2)-P1*C(1)
      N2=NN-1
      IF(NC-3) 30,30,31
31   N2=NC-1
      DO 24 J=3,N2
24   C(J)=B(J)-P1*C(J-1)-P2*C(J-2)
20   C(NC)=-P1*C(NC-1)-P2*C(NC-2)
      DEL=C(NN-2)*C(NN-2)-C(NN-1)*C(NN-3)
      QQ=B(NN)+C(NN-2)-B(NN-1)*C(NN-3)
      DEP=PP/DEL
      DEQ=QQ/DEL
      U=DEP/P1
      V=DEQ/P2
      IT=IT+1
      MMN=MMN+1
      IF(ABS(P1)-EPS) 300,302,302
300  IF(ABS(V)-EPS) 5,301,301
301  IF(IT-1000) 8,151,151
302  IF(ABS(U)-EPS) 303,301,301
303  IF(ABS(P2)-EPS) 5,300,300
151  P1=P1+DEP/2
      P2=P2+DEQ/2
      MM=MM+1
      IF(MM-1000) 22,160,160
160  WRITE(3,201) P1,P2,U,V
201  FORMAT(////4(1X,E15.8))
      PAUSE
      CALL DATSW(0,KEY0)
      GO TO (5,600),KEY0
600  MM=0
      IT=0
      GO TO 22
8   CONTINUE
      P1=P1+DEP
      P2=P2+DEQ
      GO TO 22

```

TRAITEMENT DU TRINOME DIVISEUR

```

3   DELTA=P1*P1-4*P2
      WRITE(3,202) P1,P2
202  FORMAT(10X,P1='E15.8',10X,P2='E15.8/')
      IF(DELTA) 50,51,51

```

CAS DE POLES COMPLEXES CONJUGUES

```

30  NI=NI+1
      OMEGA=SQRT(-DELTA)

```



```

RO(NI)=SQRT(P2)
XX=ATAN(OMEGA/P1)
TETA(NI)=ABS(XX)
ROP(NI)=RO(NI)**CKP
TETAP(NI)=TETA(NI)*CKP
XX=ROP(NI)
GP1=-J*EXP(I*TETAP(NI))
GP2=XX*XX
NPOLE=NPOLE+2
IND=4
GO TO 124

```

C CAS DES POLES REELS

```

51 RD=SQRT(DELTA)
NR=NR+1
XX=(-P1+RD)/2
BETA(NR)=XX
NR=NR+1
YY=X/-X
BETA(NR)=YY
NPOLE=NPOLE+2
NR1=NR-1
IF(XX) 10,11,11
10 IF(YY) 14,15,15
14 IND=1
GO TO 53
15 IND=2
GO TO 53
11 IF(YY) 12,13,13
12 IND=3
GO TO 54
13 IND=4

```

C DEUX POLES POSITIFS

```

55 XX=XX**CKP
GAMMA(NR1)=XX
YY=YY**CKP
GAMMA(NR)=YY
GP1=-XX-YY
GP2=XX*YY
GO TO 124

```

C DEUX POLES DE SIGNES CONTRAIRES

```

56 XY=XX
XX=YY
YY=XY
BETA(NR1)=XX
BETA(NR)=YY
57 XX=(-XX)**CKP
GAMMA(NR1)=XX
PHI=3.1415926536*CKP
GP1=-2*XX*YY
GP2=XX*XY
124 CS(1)=AP(1)+GP1
CS(2)=AP(2)+GP2

```



```

      IF(NPOLE=3) 435,436,436
436 DO 43 I=3,NPOLE
      CS(I)=AP(I)+GP1*AP(I-1)+GP2*AP(I-2)
435 CONTINUE
      DO 45 I=1,NPOLE
45  AP(I)=CS(I)
      GO TO (63,64,64,65),IND

```

DEUX POLES NEGATIFS

```

63  XX=YY
      NR1=NR
      NPOLE=NPOLE+2
      GO TO 53
64  YY=YY**CKP
      GAMMA(NR)=YY
      CS(1)=AP(1)-YY
      DO 73 I=2,NPOLE
73  CS(I)=AP(I)-YY*AP(I-1)
      J=NPOLE+1
      CS(J)=-AP(NPOLE)*YY
      NPOLE=J
      DO 46 I=1,NPOLE
46  AP(I)=CS(I)
65  CONTINUE
      NC=NC+2
      NN=NC+1
      DO 44 I=1,NN
44  A(I)=B(I)

```

FIN DE TRANSFORMATION

```

      IF(NC=2) 70,71,25
70  IF(NC) 400,400,72

```

DERNIER FACTEUR D'ORDRE UN

```

72  WRITE(3,203) B(1)*B(2)
203 FORMAT(10X'DERNIER FACTEUR' 2(3X,E15.8))
      NR=NR+1
      XX=-B(2)
      BETA(NR)=XX
      IF(XX) 721,722,722
721 IND=4
      NPOLE=NPOLE+2
      NR1=NR
      GO TO 53
722 GAMMA(NR)=XX*CKP
      NPOLE=NPOLE+1
      YY=XX
      GO TO 64

```

DERNIER TRINOME

```

71  P1=B(2)
      P2=B(3)
      GO TO 5

```


PAGE 1

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	1130	1130	0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE ID12

DIMENSION D(4),E(4),C(9)

DIMENSION G(9,9),GAUX(81),DEC(9)

COMMON ROP(4),TETAP(4),CANVA(9),SORT(100)

COMMON CK,CKP,IAU,NPOLE

COMMON CK,CKP,IAU,NPOLE

SOUS-PROGRAMME ID12

TRAITEMENT DES CONDITIONS INITIALES

NI1=NI+1

NI2=NI+1

NI3=NI2+1

WRITE(3,200) (X(J),J=1,NH)

200 FORMAT(/ /10X'CONDITIONS INITIALES EN T'/9(20X,F11.6/))

CONDITIONS A LA PERIODE T

DO 1 I=1,NH

1 DEC(I)=X(I)

IF(DEC(I) .GT. 0) THEN

51 DO 2 J=1, NI

2 G(1,J)=1.

DO 12 J=NI1,NI2

12 G(1,J)=0.

IF(NH-NI2) 13,13,14

60 NI3=1

14 DO 15 J=NI3,NH

15 G(1,J)=1.

13 CONTINUE

DO 3 I=2,NH

N=I-1

IF(NI) 60,60,61

61 DO 4 J=1,N.

DO 5 J=NI1,NI2

L=J-NI

IF(L .GT. 0) THEN

IF(NH -NI2) 60,60,61

60 CONTINUE

7 DO 8 J=NI3,NH

L=J-NI

8 G(I,J)=RETA(L,1+I)

6 CONTINUE

3 CONTINUE

DO 10 J=1,NH

DO 11 I=1,NH


```

      IA=(J-1)*NH+I
11  GAUX(IA)=G(I,J)
10  CONTINUE

```

RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE CALCUL DE L'EXPRESSION ANALYTIQUE

```

      CALL SIMQ(GAUX,DEC,NH,KS)
      WRITE(3,202) KS,(DEC(I),I=1,NH)
202  FORMAT(10X'KS='I3/10X'COEFFICIENTS DE LA COURBE'/9(20X,F12.6/))
      IF(NI) 70,70,71
71  DO 20 I=1,NI
      D(I)=DEC(I)
      J=I+NI
      E(I)=DEC(J)
20  CONTINUE
      IF(NH-NI2) 22,22,23
70  CONTINUE
23  DO 21 I=NI3,NH
      K=I-NI2
21  C(K)=DEC(I)
22  CONTINUE

```

CALCUL DES POINTS INITIAUX DE LA RECURRENCE INTERPOLATRICE

```

      X(1)=0.
      DO 30 I=1,NH
30  X(1)=X(1)+DEC(I)
      IF(NI) 80,80,81
81  DO 40 I=1,NI
40  X(1)=X(1)-E(I)
80  DO 31 J=2,NPOLE
      M=J-1
      X(J)=0.
      IF(NI) 90,90,91
91  DO 32 I=1,NI
32  X(J)=D(I)*(ROP(I)**M)*COS(TETAP(I)*M)+X(J)
      DO 33 I=NI1-NI2
      L=I-NI
33  X(J)=E(K)*ROP(K)**M*SIN(TETAP(K)*M)+X(J)
      IF(NH-NI2) 34,34,35
90  CONTINUE
35  DO 36 I=NI3,NH
      L=I-NI2
      XX=GAMMA(L)
      IF(BETA(L)) 351,352,352
351  PHI=3.1415926535*CKP
      GO TO 36
352  PHI=0.
36  X(J)=C(L)*XX**M*COS(PHI*M)+X(J)
34  CONTINUE
31  CONTINUE
      WRITE(3,201) (X(J),J=1,NPOLE)
201  FORMAT(10X'CONDITIONS INITIALES EN T PRIME '/9(20X,F11.6/))
      RETURN
      END

```


// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	1130	1130	0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1122PRINTSR,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK)

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

COMMON NH,NI,NR,NIT,X(9),AT(9),AP(9),RO(4),TETA(4),BETA(9)

COMMON ROP(4),TETAP(4),GAMMA(9),SORT(100)

COMMON CK,CKP,TAU,NPOLE

C

C PROGRAMME PRINCIPAL D'IDENTIFICATION ET D'INTERPOLATION

C

11 READ(2,100) NH,N

100 FORMAT(I2,I3)

READ(2,101)

101 FORMAT(F5.2)

WRITE(3,201) TAU

201 FORMAT(10X'***** PERIODE D ECHANTILLONNAGE ='F5.2' SECONDE *****')

NM=NIT

T=-TAU

C CLE 5 BASSE --> ENTREE DES POINTS PAR SOUS-PROGRAMME

C CLE 5 HAUTE --> ENTREE DES POINTS PAR CARTES

CALL DATSW(5,KEYS)

GO TO (2,1),KEYS

1 DO 22 I=1,NM

T=T+TAU

22 SORT(I)=RPNSE(T)

GO TO 24

2 DO 23 I=1,NM

T=T+TAU

23 READ(2,103) SORT(I)

103 FORMAT(F12.0)

24 CONTINUE

IDENTIFICATION

CALL ID10

WRITE(1,200)

200 FORMAT(5X'ORDRE D INTERPOLATION EN F4.0'/)

ENTREE DE L'ORDRE D'INTERPOLATION

READ(6,102)

102 FORMAT(F4.0)

CKP=1./CK

C APPEL DE ID11

4 CALL ID11

DO 10 I=1,NM


```

10 X(I)=SORT(I)
C      APPEL DE ID12
      CALL ID12
      NH1=NPOLE+1
      PREC=0.
      K=1
      ER=SORT(1)-X(1)
      PREC=PREC+ER**2
      WRITE(3,205) K,ER
      K=2
      J=NPOLE
52 X(NH1)=0.

      GENERATION DES POINTS D'INTERPOLATION

      DO 50 I=1,NPOLE
      NHI=NH1-I
50 X(NH1)=X(NH1)-AP(I)*X(NHI)
C
C      CLE 0 HAUTE -- IMPRESSION DES POINTS D'INTERPOLATION
C
      CALL DATSW(0,KEYO)
      GO TO (555,666),KEYO
555 CONTINUE
      WRITE(3,203) X(NH1)
203 FORMAT(20X'POINT ='F11.6)
666 CONTINUE
      IF(J-IFIX(CK)) 60,61,60
60 J=J+1
53 DO 51 I=1,NPOLE
51 X(I)=X(I+1)
      GO TO 52
61 ER=SORT(K)-X(NH1)
      PREC=PREC+ER**2
      WRITE(3,205) K,ER
205 FORMAT(10X,I4'E ECART='E9.2)
      J=1
      K=K+1
      IF(K-NM ) 53,53,54
54 PREC=PREC/NM
      WRITE(3,204) PREC
204 FORMAT(//10X'ECART QUADRATIQUE MOYEN SUR LES POINTS DE REPERE 'E10
      *.3//10X'***** FIN D'INTERPOLATION SUR UN AXE *****',1H1)
      GO TO 21
      END

```

UNREFERENCED STATEMENTS

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 498 VARIABLES 20 PROGRAM 550


```

      /*****
DO 12 I=1,NY
      YY(I)=YY(I)-AY(I)*YY(NYI)
      T=T+TAU
      XF=FX(T)
      YF=FY(T)
      /*****
      XR=XX(I)
      /*****
      /*****
      DR=RF-RR
      WRITE(3,274) XR,XF,YR,YF,RR,RF,DR
DO 13 I=1,NY
      XX(I)=XX(I+1)
13 YY(I)=YY(I+1)
10 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 FLOPS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 498 VARIABLES 184 PROGRAM 932

END OF COMPILATION

// NEW

// 108

```
LOG DRIVE      CART SPEC      CART AVAIL      PHY DRIVE
  0000          1130          1130          0000
```

VE 800 ACTUAL BK CONFIG 8K

// 109

APOS(CARD,1132,PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK)

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*REAL WORD INTEGERS

DIMENSION AX(10),XX(10),AY(10),YY(10)

COMMON NH,NIT,NR,NIT,X(9),AT(9),AP(9),RO(4),TETA(4),BETA(9)

COMMON RCP(4),TETAP(4),GAMMA(9),SORT(100)

COMMON CK,CKP,TAU,NPOLE

C PROGRAMME DE GENERATION DE COURBES PLANES APRES IDENTIFICATION

C AXE DES X

READ(2,100) NM,NIT

10 FORMAT(12,12)

READ(2,101) TAU

11 FORMAT(F3.2)

T=-TAU

NM=NIT+1

DO 2 1=1,NM

T=T+TAU

2 SORT(1)=FX(T)

C IDENTIFICATION PAR 1010

CALL 1010

NX=NH

N1=NX+1

DO 3 I=1,NX

AX(I)=A"(I)

3 XX(I)=X(I)

C AXE DES Y

READ(2,102) TAU

12 FORMAT(F3.2)

T=TAU

DO 4 1=1,NM

T=T+TAU

4 SORT(1)=FY(T)

C IDENTIFICATION PAR 1020

CALL 1020

NY=NH

N2=NY+1


```

DO 41 I=1,NY
  AY(I)=AT(I)
41 YY(I)=X(I)
  WRITE(1,200)
200 FORMAT(5X'NOMBRE DE POINTS A GENERER EN 15')

```

ENTREE DU NOMBRE DE POINTS A GENERER

```

  READ(6,102) NMAX
102 FORMAT(I5)

```

AJUSTEMENT DES DEUX RECURRENCES

```

  IF(NX-NY) 5,6,7
5 DO 51 J=N1,NY
  XX(J)=0.
  DO 50 I=1,NX
  NXI=J-I
50 XX(J)=XX(J)-AX(I)*XX(NXI)
51 CONTINUE
  N=NY
  GO TO 8
7 DO 71 J=N2,NX
  YY(J)=0.
  DO 70 I=1,NY
  NYI=J-I
70 YY(J)=YY(J)-AY(I)*YY(NYI)
71 CONTINUE
  N=NX
  GO TO 8
6 N=NX
3 T=-TAU
  WRITE(1,201)
201 FORMAT(8X'XREC'10X'XFCT'10X'YREC'10X'YFCT'10X'RREC'10X'RECT'10X'DE
  *LTA R'///)

```

GENERATION DES COURBES ANALYTIQUE ET RECURRENTE
COMPARAISON DES RAYONS VECTEURS

```

DO 9 I=1,N
  T=T+TAU
  XF=FX(T)
  YF=FY(T)
  RF=SQRT(XF*XF+YF*YF)
  XR=AX I)
  YR=YY I)
  RR=SQRT(XR*XR+YR*YR)
  DR=RF-RR
  WRITE(3,202) XR,XF,YR,YF,RR,RF,DR
202 FORMAT(4X,F12.6,5(2X,F12.6),4X,E10.3)
9 CONTINUE
  NN=N
  N=N+1
  DO 10 K=1,NMAX
  XX(N)=0.
  DO 11 I=1,NX
  NXI=N-I
11 XX(N)=XX(N)-AX(I)*XX(NXI)

```


NOM DE L'ETUDIANT : RODDE Gilles

Nature de la Thèse : DOCTEUR-INGENIEUR.

Vu , Approuvé
et permis d'imprimer.

NANCY, le 11 JAN. 1973

Le Président du Conseil de l'Université
de NANCY 1,

J.R. HELLUY

